2. Sucessões e Séries de Funções; Séries de potências(revisitadas) e Séries de Fourier

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018

Isabel Brás

UA, 17/2/2020

Cálculo II – Agrup. IV 18/19

Resumo dos Conteúdos

1. Sucessões de funções: convergências pontual e uniforme
   - Exemplo Introdutório
   - Conceitos e propriedades básicas
   - Propriedades das sucessões convergentes uniformemente
2. Séries de Funções: convergências pontual e uniforme
   - Conceitos e propriedades básicas
   - Propriedades das séries uniformemente convergentes
   - Critério de Weierstrass
3. Séries de Potências/Séries de Taylor
   - Propriedades relativas à convergência uniforme
   - Desenvolvimentos de uma função em série de Taylor
4. Séries de Fourier
   - Definições e exemplos
   - Extensões periódicas; série dos senos e série dos cossenos
   - Convergência pontual (Teorema de Dirichlet)

Exemplo Introdutório

Para $x \in]-1,1[$, a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

é convergente e a sua soma é, para cada x, $s(x) = \frac{1}{1-x}$.

A afirmação anterior tem a seguinte interpretação usando de convergência sucessões:

Para cada $x \in]-1,1[$, a sucessão

$$s_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

tem limite finito, ou seja é convergente, e $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Exemplo Introdutório (cont.)

Essa convergência pode ainda ser encarada da seguinte forma:

Considerem-se as funções $s_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$, de domínio $]-1,1[$.
A sucessão (de funções)

$$s_1(x), s_2(x), s_3(x), \ldots, s_n(x), \ldots .$$

é convergente, ponto a ponto, para a função $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$, no intervalo $]-1,1[$.

Este conceito de convergência e ainda outro "mais exigente" que garante propriedades "desejáveis" para sucessões (e séries) de funções será aqui objeto de estudo.

Sucessão de funções

Definição:

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}(D)$ o conjunto das funções r.v.r. definidas em D. Uma sucessão de funções definidas em D (f_n) é uma aplicação

$$\begin{aligned} (f_n)\colon \mathbb{N} &\to \mathcal{F}(D) \\ n &\mapsto f_n \,. \end{aligned}$$

Observação:

Note-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_n\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) \quad . \end{aligned}$$

Exemplos

1. (f_n) definida por
$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$
é uma sucessão de funções definidas em $\mathbb{R}$. Isto é, (f_n) é a seguinte sucessão de funções definidas em $\mathbb{R}$:
$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{x}{2},\ f_3(x) = \frac{x}{3}, \ldots,\ f_n(x) = \frac{x}{n}, \ldots\ .$$

2. (h_n), onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$h_n(x) = x^n\,,\ x \in [0,1]\,,$$
é uma sucessão de funções definidas em $[0,1]$. Isto é, (h_n) é a seguinte sucessão de funções definidas em $[0,1]$:
$$h_1(x) = x,\ h_2(x) = x^2,\ h_3(x) = x^3, \ldots,\ h_n(x) = x^n, \ldots\ .$$

Convergência Pontual

Definição:

Sejam (f_n) uma sucessão de funções reais definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Diz-se que (f_n) converge pontualmente para f em D se

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \text{ para todo } x \in D\,.$$

Exemplos:

1. (f_n), onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in [0,1]$, converge pontualmente para a função nula, pois para todo o $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0\,.$$

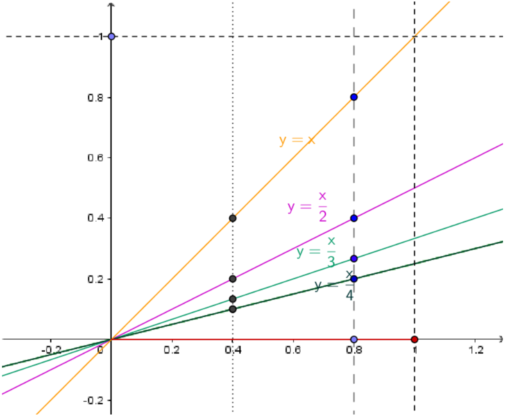
Nota: O domínio das funções pode ser alargado a $\mathbb{R}$, mantendo-se a convergência pontual para $f(x) \equiv 0$.

Exemplos (cont.)

Ilustração gráfica—Exemplo 1:

$f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in [0, 1]$

$f(x) = 0$

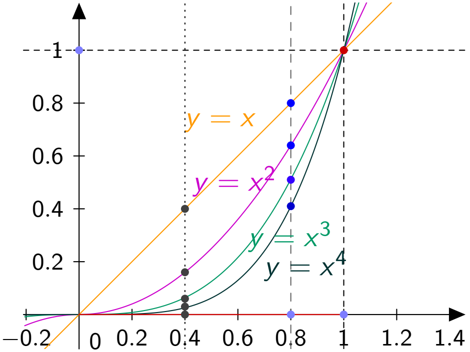


Exemplos (cont.)

2. (h_n), onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, converge pontualmente para a função $h(x)$ definida por

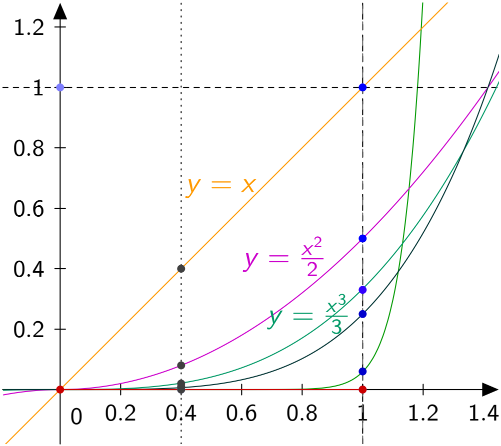
$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Ilustração gráfica:



Exemplos (cont.)

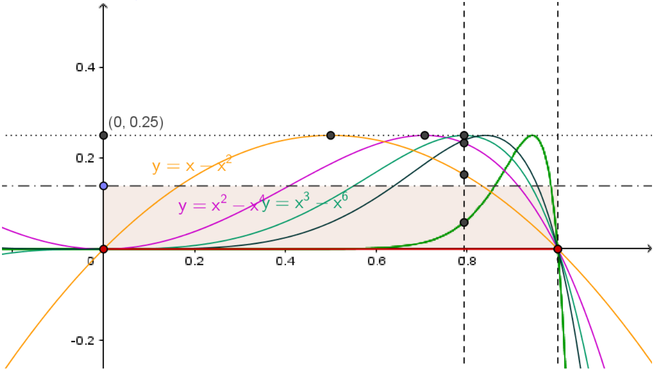
3. (g_n), onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$, converge pontualmente para a função nula.
   Ilustração gráfica:



Exemplos (cont.)

4. (p_n), onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = x^n(1 - x^n)\,,\ x \in [0, 1]$, converge pontualmente para a função nula.

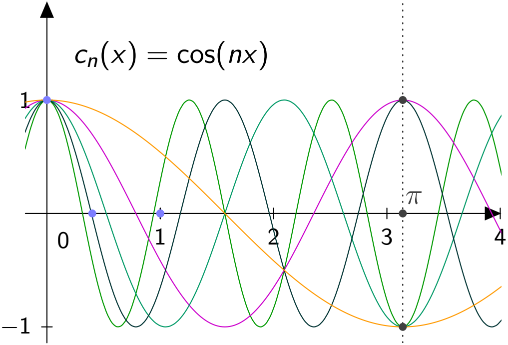
Ilustração gráfica:



Exemplos (cont.)

5. (c_n), onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n(x) = \cos(nx)\,,\ x \in [0, \pi]$, não converge pontualmente.

Ilustração Gráfica:



Voltando aos exemplos 3 e 4

(g_n) e (p_n) convergem pontualmente para a função nula (ex. 3 e 4, resp.).
Haverá alguma diferença na forma como convergem?
Analisando os esboços gráficos respetivos nota-se os seguintes comportamentos distintos:

- Em (g_n), o gráfico de $g_n(x)$ vai-se *aproximando* do gráfico da função limite, à medida que n cresce. Isto é, fixada uma faixa horizontal (qualquer, tão "pequena" quanto se queira) em torno do gráfico da função limite, é sempre possível encontrar uma ordem a partir da qual, todos os pontos de interseção da reta $x = x_0$ (com $x_0 \in [0, 1]$ arbitrário) com os gráficos das funções g_n se situam nessa faixa. Assim, a partir de uma determinada ordem, todos os gráficos das funções g_n situam-se na faixa considerada. ▸ ver applet
- Em (p_n) tal não acontece. Isto é, é possível definir uma faixa em torno do gráfico da função limite para a qual não existe uma ordem, a partir da qual os gráficos de $p_n(x)$ se situem nessa faixa. ▸ ver applet

Convergência Uniforme

Definição:

Sejam (f_n) uma sucessão de funções reais definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Diz-se que (f_n) converge uniformemente para f em D se a sucessão numérica de termo geral

$$M_n := \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$$

é um infinitésimo, ou seja, $\lim_{n \to +\infty} M_n = 0$.

Exemplo:

A sucessão de funções (g_n) do Exemplo 3 converge uniformemente para a função nula, em $[0, 1]$. De facto,

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{|x^n|}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Nos outros exemplos a convergência é uniforme?

Ex. 1 (f_n), onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in [0, 1]$, converge uniformemente para a função nula (porquê?) ▸ ver applet

Obs. O domínio das funções pode ser alargado para qualquer subconjunto não vazio e limitado de $\mathbb{R}$, mantendo-se a convergência uniforme para $f(x) \equiv 0$. Em $\mathbb{R}$ a sucessão apenas converge pontualmente.

Ex. 2 (h_n), onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, não converge uniformemente para a função $h(x)$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

(porquê?) ▸ ver applet

Ex. 4 (p_n), onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $x \in [0, 1]$, converge pontualmente para a função nula, mas não converge uniformemente. (porquê?) ▸ ver applet

Ex. 5 (c_n), onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n(x) = \cos(nx)$, $x \in [0, \pi]$, nem sequer converge pontualmente. ▸ ver applet

A convergência uniforme implica a convergência pontual

Proposição:

Se (f_n) converge uniformemente para f num conjunto D, então (f_n) converge pontualmente para f nesse conjunto.

Prova:

Para cada $x \in D$,

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| = M_n, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Se (f_n) converge uniformemente para f em D, então, $\lim_{n \to +\infty} M_n = 0$.
Logo, para cada $x \in D$,

$$\lim_{n \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

e portanto, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Propriedades das sucessões convergentes uniformemente

Teorema: Seja (f_n) uma sucessão de funções contínuas em $[a, b]$.

Se (f_n) converge uniformemente para f em $[a, b]$, então:

(i) f é contínua em $[a, b]$ e

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x)) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to c} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(c) = f(c)$, $c \in [a, b]$.

(ii) f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx;$$

(iii) Adicionalmente, se as funções f_n têm derivadas contínuas em $[a, b]$ e a sucessão (f_n') converge uniformemente em $[a, b]$, então

f é diferenciável em $[a, b]$ e $f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x),\ \forall x \in [a, b]$.

Observações relativas ao teorema anterior

1. As propriedades anteriores podem funcionar como critérios para provar que uma dada sucessão não converge uniformemente.
2. O resultado em (iii) do teorema anterior mantém-se válido se, em vez da convergência uniforme de (f_n), apenas assumirmos a sua convergência pontual (na verdade, basta que exista um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que a sucessão numérica $\big(f_n(x_0)\big)$ seja convergente).
3. A continuidade e a diferenciabilidade nos extremos do intervalo devem ser tomadas como laterais.

Série de funções

Definição:

Seja (f_n) uma sucessão de funções definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$. Chama-se série de funções de termo geral f_n ao par $((f_n),(S_n))$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\ ,\ x \in D\ .$$

Representa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \text{ ou, em alternativa, por } f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots \quad .$$

Observação:

Tal como nas série numéricas, a (S_n) chamamos a sucessão (de funções) das somas parciais da série de termo geral f_n.

Convergência pontual/uniforme de uma série de funções

Definição: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ uma série de funções definidas em D tal que (S_n) é a sua sucessão de somas parciais.

1. A série de funções converge pontualmente em D se (S_n) convergir pontualmente em D.
2. A série de funções converge uniformemente em D se (S_n) convergir uniformemente em D.

Caso a série seja convergente, designa-se por soma da série a função S, limite da sucessão (S_n), escreve-se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = S$ e diz-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge para S (pontual ou uniformemente, conforme o caso).

Exemplo:

Já vimos que, a série de potências, definidas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

converge pontualmente em $]-1,1[$ e a sua soma é $s(x) = \frac{1}{1-x}$.

Além disso, esta série converge uniformemente em qualquer intervalo fechado e limitado contido em $]-1,1[$ (ver a justificação mais à frente, no slide 27) . Veja a seguinte ▸ applet .

Note que:

Se uma série de funções converge uniformemente em D então converge pontualmente em D. A recíproca não é verdadeira.

Domínio de Convergência de uma série de funções

Observação:

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ é convergente (pontualmente) em D com soma S, então $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ é convergente e tem soma $S(x)$, para cada $x \in D$, e vice-versa.

Definição:

Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, onde f_n estão definidas em D. Ao conjunto dos pontos $x \in D$ para os quais a série numérica correspondente é convergente chama-se domínio de convergência da série.

Exemplo: A série de funções, definidas em $\mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ tem domínio de convergência $\mathbb{R}^+$.

Propriedades das séries uniformemente convergentes

Teorema:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ uma série de funções contínuas em $[a,b]$. Suponha-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em $[a,b]$ com soma S. Então:

(i) A soma S é contínua em $[a,b]$;

(ii) A soma S é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

[integração termo a termo].

(iii) Adicionalmente, se cada f_n é de classe C^1 em $[a,b]$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente em $[a,b]$, então S é diferenciável neste intervalo e

$$\frac{dS}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{df_n}{dx}(x), \quad x \in [a,b]$$

[derivação termo a termo].

Observações relativas ao teorema anterior

1. As propriedades anteriores podem funcionar como critérios para provar que uma dada série de funções não converge uniformemente. Isto é, se a função limite f não satisfizer a alguma das propriedades listadas, a convergência da série não é uniforme no intervalo em causa.

2. O resultado em (iii) do teorema anterior mantém-se válido se, em vez da convergência uniforme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, assumirmos apenas a sua convergência pontual (na verdade, basta que exista um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ seja convergente).

Critério de Weierstrass

(condição suficiente de convergência uniforme de uma série de funções)

Teorema:

Sejam (f_n) uma sucessão de funções definidas em D e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica convergente de termos não negativos, tais que

$$|f_n(x)| \leq a_n\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in D.$$

Então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em D.

Exemplo:

(aplicação do Critério de Weierstrass, integração e derivação termo a termo)

Pelo Critério de Weierstrass, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ (Porquê?).

Neste caso, é possível integrar e derivar termo a termo a sua função soma, i.e.,

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{n^2+x^2}\, dx \right) = \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n^2+x^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2} \qquad \text{(Confirme!)}$$

Exercício:

Faça uma análise análoga ao exemplo anterior usando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$.

Séries de Potências: convergência uniforme

Teorema:

Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$. Então a série converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado do seu intervalo de convergência $]c-R, c+R[$.

Prova para o caso $c=0$: Seja $[a,b] \subset]-R, R[$.

Note-se que, para todo o $x \in [a,b]$, $|x| \leq M$, onde $M = \max\{|a|,|b|\}$. Assim,

$$|a_n x^n| \leq |a_n| M^n, \forall x \in [a,b] \; .$$

Como $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| M^n$ é convergente, pois $M \in [0,R[$, pelo critério de

Weierstrass, a série de funções $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em $[a,b]$.

Teorema de Abel:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$. Se a série converge no ponto $x = c + R$ (resp., no ponto $x = c - R$), então ela converge uniformemente em $[c, c+R]$ (resp., em $[c-R, c]$).

Exemplo de aplicação:

O domínio de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$ é $[-7, 3[$ (verifique!).

Então, pelo Teorema de Abel, a série converge uniformemente em $[-7, -2]$. Conjugando com o Teorema do slide 27, conclui-se que, esta série é uniformemente convergente em qualquer intervalo da forma

$$[-7, b]\,, \text{ com } -7 \leq b < 3\,.$$

Observações:

Consequentemente, uma série de potências é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado do seu domínio de convergência. Deste modo(no seu domínio de convergência):

- A função soma de uma série de potências é contínua.
- Pode-se derivar termo a termo.
- Pode-se integrar termo a termo.

Mais precisamente, do teorema do slide 23 resulta o teorema do slide seguinte.

Teorema: Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências, $I =]c-R, c+R[$

o seu intervalo de convergência, e $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$.Então:

(i) A função f é contínua em todo o domínio (de convergência da série).

(ii) A função f é diferenciável em I e $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-c)^{n-1}$, $\forall x \in I$.

(iii) A função F, definida por $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$, é a primitiva de f em I tal que $F(c) = 0$.

(iv) A função f é integrável em qualquer subintervalo $[a, b]$ do domínio de convergência e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n(x-c)^n dx.$$

Unicidade de representação de uma função em série de potências

Teorema:

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n, \qquad x \in I =]c-R, c+R[\;\; ,$$

então f possui derivadas finitas de qualquer ordem em I e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Observações:

1. Para se provar o teorema anterior basta considerar a propriedade (ii) do Teorema do slide 30 e fazer alguns cálculos adicionais.
2. O teorema anterior mostra que sempre que uma série de potências convirja para $f(x)$ numa vizinhaça do seu centro c, ela é a série de Taylor de $f(x)$ centrada em c.

Exemplos de aplicação das propriedades das séries de potências

$\downarrow$

obtenção de desenvolvimentos de Taylor de uma função recorrendo ao desenvolvimento em Taylor de outra função (adequada).

1. Partindo deste desenvolvimento de MacLaurin

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\,,\ -1 < x < 1\,,$$

podemos concluir que (Porquê?)

1. $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n\,,\ -1 < x < 1;$$
2. $$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\,,\ -1 \leq x < 1,$$
3. $$\ln x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}\,,\qquad 0 < x \leq 2.$$

2. Partindo deste desenvolvimento de MacLaurin

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}\,,\ -1 < x < 1\,,$$

podemos concluir que (Porquê?)

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,\ -1 \leq x \leq 1;$$

Séries Trigonométricas

Definição:

As série de funções com a seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \mathrm{sen}(n\omega x)\right] \quad (1)$$

onde $\omega \in \mathbb{R}^+$ e $(a_n), (b_n)$ são sucessões numéricas, têm a designação genérica de séries trigonométricas.

Observações:

- Se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ forem absolutamente convergentes, então a série (1) é absolutamente e uniformemente convergente em $\mathbb{R}$
- Caso (1) seja convergente a sua soma $S(x)$ é periódica de período $\frac{2\pi}{\omega}$.
- Estas séries são usadas para aproximar funções que sejam periódicas.

Revisão do conceito de função periódica

Definição:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se periódica se existir $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O período de f é o menor valor de T que verifica a igualdade anterior. Neste caso, dizemos que, f é T–periódica.

Observações:

- Se f é T–periódica, então pode converter-se, por mudança de variável, numa 2π–periódica, para tal basta considerar-se
$$F(x) := f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$
- Por esse motivo, passamos a considerar apenas funções 2π–periódicas.

Coeficientes de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Se esta série trigonométrica convergir uniformemente, a_n e b_n são completamente determinadas pela função f.

- Determinação de a_0: Mostra-se que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0$$

e portanto

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

Coeficientes de Fourier (cont.)

- Determinação de a_m, com $m \geq 1$: Multiplica-se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right],$$

por $\cos(mx)$ e integra-se no intervalo $[-\pi, \pi]$, obtendo-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) f(x)\, dx = \pi a_m$$

e portanto

$$\boxed{a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx\,, \ \text{para } m = 1, 2, \ldots}$$

- Determinação de b_m, com $m \geq 1$: Usando argumentos análogos, obtém-se

$$\boxed{b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx, \ \text{para } m = 1, 2, \ldots}$$

Série de Fourier

Definição:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e integrável em $[-\pi, \pi]$. Chama-se série de Fourier associada à função f (ou da função f) à série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right],$$

onde a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ e b_n $(n \in \mathbb{N})$ são dados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx.$$

a_n e b_n são designados por coeficientes de Fourier da função f.

Notação:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right]$$

- Os coeficientes de Fourier podem ser calculados usando um qualquer intervalo de integração de amplitude 2π (devido à periodicidade das funções integrandas em causa).
- Uma série de Fourier nem sempre converge. Caso seja convergente, a sua soma é 2π–periódica, mas pode ser diferente f.
- Se f é uma função ímpar, a sua série de Fourier é uma *série de senos*.
- Se f é uma função par, a sua série de Fourier é uma *série de cossenos*.

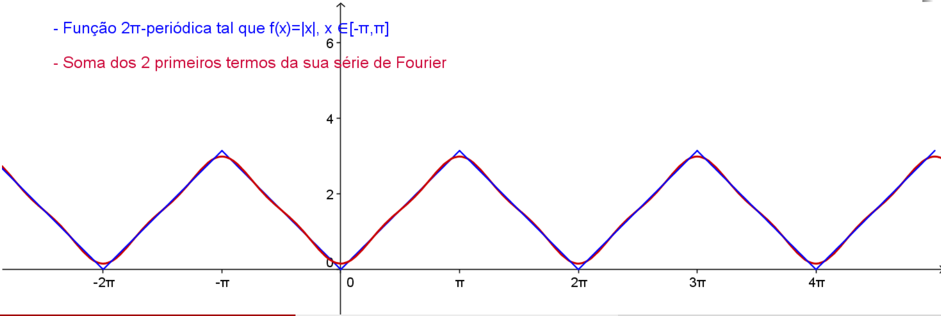
Exemplos

- Seja f a função 2π-periódica definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|$. Neste caso,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

Ilustração gráfica:

▸ ver applet

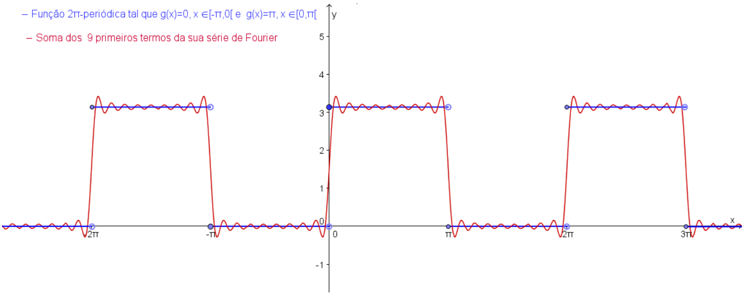


Exemplos (cont.)

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π–periódica e $g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

  Neste caso, $g(x) \sim \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x]\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$

  Ilustração gráfica:



ver applet

Extensões Periódicas

Extensões de funções definidas em intervalos de amplitude 2π:

- Se $f : [a, a+2\pi[\to \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}$, podemos extendê-la a todo o $\mathbb{R}$ de forma única de forma a torná-la 2π–periódica. O mesmo se passa se $f :]a, a+2\pi] \to \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}$.
  Por isso, supondo que f é integrável, com algum abuso de linguagem, dizemos que a série de Fourier de f é a série de Fourier da sua extensão 2π–periódica a $\mathbb{R}$.
- Caso o domínio de f seja fechado, isto é, $f : [a, a+2\pi] \to \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}$, consideramos que a série de Fourier de f é a série de Fourier da extensão 2π–periódica de $f|_{[a,a+2\pi[}$ (ou $f|_{]a,a+2\pi]}$, é indiferente, pois a série obtida é a mesma).
- Para simplificar a escrita, com algum abuso de linguagem, é frequente representar por f estas extensões 2π–periódicas de f.

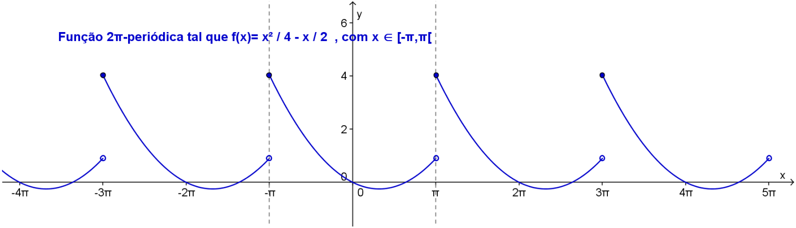
Extensões Periódicas (continuação)

- Exemplo:

$$\begin{array}{rcl} f:[-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{2} \end{array}$$

a sua série de Fourier é a série de Fourier da função, de domínio $\mathbb{R}$, 2π-periódica tal que $f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}$, para $x \in [-\pi,\pi[$.

Ilustração gráfica:



ver applet

Extensões Periódicas (continuação)

Extensões ímpares de funções definidas no intervalo $[0, \pi]$:

Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Considere-se a "extensão" ao intervalo $[-\pi, \pi]$ definida da seguinte forma:

$$\underbrace{f_i}_{\text{extensão ímpar de } f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_i(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

A série de Fourier da extensão ímpar de f é uma série de senos.

Extensões Periódicas (continuação)

Extensões pares de funções definidas no intervalo $[0, \pi]$:

Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Considere-se a extensão ao intervalo $[-\pi, \pi]$ definida da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{f_p}_{\text{extensão par de } f} : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_p(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \end{array}$$

A série de Fourier da extensão par de f é uma série de cossenos.

Exemplo

$$\begin{array}{rcl} f:[0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x \end{array}$$

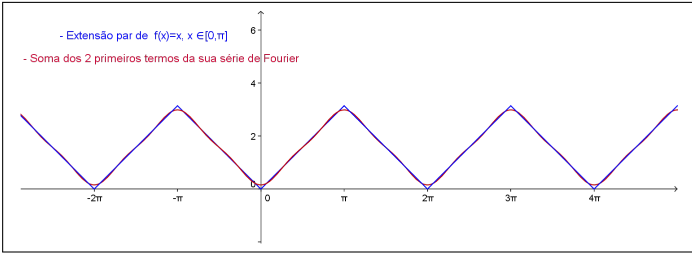
Extensão par de f: $$\begin{array}{rcl} f_p:[-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_p(x)=|x| \end{array}$$

A série de Fourier da extensão par de f é $\displaystyle \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

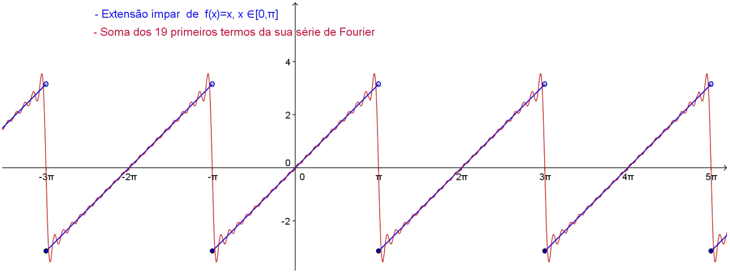
Extensão ímpar de f: $$\begin{array}{rcl} f_i:[-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_i(x)=x \end{array}$$

A série de Fourier da extensão ímpar de f é $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(nx)}{n}$

Ilustrações Gráficas



▸ ver applet



▸ ver applet

Convergência de uma série de Fourier

Uma série de Fourier nem sempre converge para a função que lhe deu origem. No entanto, sob certas condições podemos identificar a sua soma, e como vamos ver, nalguns desses casos a soma coincide com a função original. Analise os seguintes exemplos gráficos:

1. Onda Triangular ‣ ver applet
2. Função quadrática par ‣ ver applet
3. Onda quadrada ‣ ver applet
4. Dente de serra ‣ ver applet
5. Função quadrática (não par) ‣ ver applet

Antes enunciar as ditas condições, precisamos de introduzir a noção de função seccionalmente diferenciável.

Convergência de uma série de Fourier (cont.)

Definições:

- f diz-se seccionalmente contínua em $[a, b]$ se existir uma partição $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) de $[a, b]$ tal que f é contínua em cada subintervalo aberto $]a_{j-1}, a_j[$ ($j = 1, \dots, n$) e existirem e forem finitos os limites laterais

$$f(a_{j-1}^+) := \lim_{x \to a_{j-1}^+} f(x) \qquad e \qquad f(a_j^-) := \lim_{x \to a_j^-} f(x).$$

  A função f dir-se-á seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$ se for seccionalmente contínua em todo o intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

- Uma função seccionalmente contínua diz-se seccionalmente diferenciável se a sua derivada é também seccionalmente contínua.

Observação: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é 2π-periódica, então f é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ sse f é seccionalmente diferenciável em $[-\pi, \pi]$, (ou em qualquer outro intervalo de amplitude 2π).

Convergência de uma série de Fourier (cont.)

Teorema de Dirichlet:

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e seccionalmente diferenciável (em $\mathbb{R}$) e $c \in \mathbb{R}$. Então a série de Fourier de f converge no ponto c para $\dfrac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$ (a média dos limites laterais de f no ponto c).

Observações: Nas condições do Teorema de Dirichlet:

- A série de Fourier de f converge (pontualmente) para a função

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad \text{se } x \text{ é ponto de continuidade de } f; \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & , \quad \text{se } x \text{ não é ponto de continuidade de } f. \end{cases}$$

- S é sempre 2π-periódica, pelo que basta conhecer $S(x)$ num intervalo de amplitude 2π.

Exemplo de função que satisfaz o Teorema de Dirichlet

Seja f a função 2π-periódica definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|$. Já vimos,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

slide 40.

Como f é contínua em $\mathbb{R}$ e a sua derivada é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$ (Justifique!), pelo Teorema de Dirichlet,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Outro exemplo de aplicação do Teorema de Dirichlet

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π–periódica e $g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

Já vimos, $g(x) \sim \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x]\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$ slide 41

Como g é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ (Justifique!), pelo Teorema de Dirichlet, nos pontos onde g é contínua, i.e., para $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] = g(x)\,;$$

Nos pontos $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, onde g é descontinua,

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exemplos de aplicação ao cálculo de somas de séries numéricas

1. Já vimos que
$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \qquad x \in [-\pi,\pi] \, .$$

   Tomando $x = 0$, obtemos $0 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, logo
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \qquad (1)$$

   Partindo de (1), é possível mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Como?)

2. Já vimos que

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad x = 0, \pi \\ \pi & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} .$$

Tomando $x = \frac{\pi}{2}$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$