Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1º Ano/2º Sem)

Teste T1 (Avaliação Discreta) - 12/04/2024 **Duração: 2h**

1. Considere as seguintes afirmações:

   (a) Um artista é famoso só se todos o conhecem.

   (b) Banksy é um artista famoso que ninguém conhece.

   Exprima cada uma das afirmações anteriores na linguagem de primeira ordem usando os seguintes símbolos de predicado com a respetiva interpretação no domínio (universo) das pessoas:

   $A(x)$: x é artista; $F(x)$: x é famoso; $C(x,y)$: x conhece y.

2. Considere uma linguagem de primeira ordem com os símbolos de predicado H de um argumento e P de dois argumentos, sendo x, y, z, símbolos de variáveis e a símbolo de constante, com as seguintes fórmulas:

   $\varphi_1 \equiv \forall x \left(H(x) \rightarrow \exists y\, (H(y) \wedge P(y,x))\right)$

   $\varphi_2 \equiv H(a)$

   $\psi \equiv \exists z \left(H(z) \wedge P(z,a)\right)$

   Usando o método de resolução mostre que $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$.

3. Considere a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com uma estrutura $\mathcal{M}$ de domínio $D = \{1,3,5,15\}$, predicados $L(x,y)$: "$x < y$" e $M(y,x)$: "y é um múltiplo de x" (isto é, $y = kx$, $k \in \mathbb{N}$) e valoração V definida por $v(z) = 3$ e $v(w) = 5$, sendo x, y, z, w, símbolos de variáveis.

   Justificando, avalie na interpretação $(\mathcal{M}, V)$ cada uma das seguintes fórmulas (Válida ou Não válida):

   (a) $\forall x \left(M(x,z) \vee L(x,w)\right)$;

   (b) $\forall z\, \exists w \left(L(z,w) \rightarrow M(w,z)\right)$.

4. Em 70 entrevistados que frequentam as praias do Areão, Barra, Costa Nova e Vagueira, 20 declararam frequentar a Vagueira, 35 a Costa Nova, 47 a Barra, 12 declararam frequentar Barra e Vagueira, 23 Barra e Costa Nova, 11 Costa Nova e Vagueira e 5 declararam frequentar as três praias (Barra, Costa Nova e Vagueira).

   Determine o número de entrevistados que frequenta a praia do Areão mas não frequenta nenhuma das restantes três praias, Barra, Costa Nova e Vagueira.

5. Considere uma sequência estritamente crescente de 20 termos $x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, 20$, tal que

   $$x_1 < x_2 < \ldots < x_{20}$$

   com $x_1 = 1$ e $x_{20} = 30$. Utilize o princípio da gaiola de pombos para mostrar que na sequência dada existem dois termos cuja diferença é igual a 8.

6. Determine o número de soluções inteiras que satisfazem a inequação

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 20\ ,$$

   com $x_i \in \{0,1,2,3,\ldots\}$, para $i = 1,2,3,4,5$. Justifique.

7. Qual o coeficiente de x^{10} no polinómio $p(x) = (1 + x + x^2)^{52}$? Justifique.

Cotações:

1.(a)	1.(b)	2.	3.(a)	3.(b)	4.	5.	6.	7.
1.0	1.0	5.0	1.5	1.5	3.0	2.0	2.5	2.5

T1
ER1

universidade de aveiro departamento de matemática

ano lectivo 2023/2024 época Normal

classificação

nome: EXEMPLO DE RESOLUÇÃO do

~~n.º~~: ~~curso~~: TESTE T1

regime:

disciplina: MATEMÁTICA DISCRETA (47166)

melhoria de nota ☐

data 12/04/2024 n.º de folhas suplementares entregues:

(declaro que desisto:)

1. (a) $A(x)$: "x é artista" $C(x,y)$: "x conhece y"

$F(x)$: "x é famoso"

"Um artista é famoso só se todos o conhecem".

$\forall x\, \big((A(x) \wedge F(x)) \longrightarrow (\forall y\; C(y,x)) \big)$

(b) "Banksy é um artista famoso que ninguém conhece."

$A(\text{Banksy}) \wedge F(\text{Banksy}) \wedge \neg(\exists x\; C(x, \text{Banksy}))$

2.

$\varphi_1 \equiv \forall x\, \big(H(x) \to \exists y\, (H(y) \wedge P(y,x)) \big)$

$\equiv \forall x\, \big(H(x) \to (H(f(x)) \wedge P(f(x),x)) \big)$, $y = f(x)$ função de Skolem

(i) $\equiv \forall x\, \big(\neg H(x) \vee (H(f(x)) \wedge P(f(x),x)) \big)$

(ii) $\equiv \forall x\, \big(\underbrace{(\neg H(x) \vee H(f(x)))}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg H(x) \vee P(f(x),x))}_{C_2} \big)$

(i) $H \to T \equiv \neg H \vee T$

(ii) distribut.

FNS (Forma Normal de Skolem): cláusulas C_1 e C_2

T1 – ERC

$\varphi_2 \equiv \underbrace{H(a)}_{C_3}$

FNS:

(iii) $\neg \exists z\, T(z)$
$\equiv \forall z\, \neg T(z)$

$\neg \psi \equiv \neg\left(\exists z \left(H(z) \wedge P(z,a)\right)\right)$

(iv) De Morgan
$\neg(Q \wedge R) \equiv \neg Q \vee \neg R$

(iii) $\equiv \forall z\, \neg\left(H(z) \wedge P(z,a)\right)$

(iv) $\equiv \forall z \underbrace{\left(\neg H(z) \vee \neg P(z,a)\right)}_{C_4}$

FNS:

Para mostrar que $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$, isto é, que ψ é consequência lógica de φ_1 e φ_2, prova-se que o conjunto de cláusulas (com variáveis distintas)

$\mathcal{C} = \{ \neg H(x) \vee H(f(x)),\ \neg H(y) \vee P(f(y),y),\ H(a),$
$\neg H(z) \vee \neg P(z,a) \}$ é inconsistente; usando o método de resolução, tem-se:

$C_1\sigma_1 : \neg H(a) \vee H(f(a))$ — u.m.g. de $\{H(x), H(a)\}$ é $\sigma_1 = \{a/x\}$

$C_3 : H(a)$

$C_5 : H(f(a))$ — $RB(C_1\sigma_1, C_3)$ — u.m.g. de $\{H(f(a)), H(z)\}$ é $\sigma_2 = \{f(a)/z\}$

$C_4\sigma_2 : \neg H(f(a)) \vee \neg P(f(a),a)$

$C_6 : \neg P(f(a),a)$ — $RB(C_5, C_4\sigma_2)$ — u.m.g. de $\{P(f(a),a), P(f(y),y)\}$ é $\sigma_3 = \{a/y\}$

$C_2\sigma_3 : \neg H(a) \vee P(f(a),a)$

$C_7 : \neg H(a)$ — $RB(C_6, C_2\sigma_3)$

$C_3 : H(a)$

$\perp$ — $RB(C_7, C_3)$

Donde, $\mathcal{C}$ é inconsistente, isto é, $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$ é verdadeira.

3.(a) Interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com estrutura $\mathcal{M}$:
$D = \{1, 3, 5, 15\}$, predicados $L(x,y)$: "$x < y$",
$M(y,x)$: "$y = kx,\ k \in \mathbb{N}$" e valoração V definida por
$v(z) = 3$ e $v(w) = 5$;

$\varphi_a \equiv \forall x\,(M(x,z) \vee L(x,w))$, como z e w são variáveis livres em φ_a, vamos avaliar se

$(\mathcal{M}, V) \models \forall x\,(M(x, v(z)) \vee L(x, v(w)))$

$(\mathcal{M}, V) \models \forall x\,(M(x,3) \vee L(x,5))$,

isto é, avaliar se $(M(x,3) \vee L(x,5))$ é verdadeira em $(\mathcal{M}, V\frac{x}{a})$ para todo o $a \in D$:

$V\frac{x}{1}\,(\underbrace{M(1,3)}_{0} \vee \underbrace{L(1,5)}_{1}) \equiv 1$,

$V\frac{x}{3}\,(\underbrace{M(3,3)}_{1} \vee \underbrace{L(3,5)}_{1}) \equiv 1$,

$V\frac{x}{5}\,(\underbrace{M(5,3)}_{0} \vee \underbrace{L(5,5)}_{0}) \equiv 0$ (Falso),

$V\frac{x}{15}\,(\underbrace{M(15,3)}_{1} \vee \underbrace{L(15,5)}_{0}) \equiv 1$,

logo, existe $a = 5 \in D$, tal que $(M(a,3) \vee L(a,5)) \equiv 0$

pelo que, $(\mathcal{M}, V\frac{x}{a}) \not\models (M(x,z) \vee L(x,w))$ e, portanto, φ_a é Não Válida em $(\mathcal{M}, V)$, ou seja,

$(\mathcal{M}, V) \not\models \varphi_a$.

3. (b) $\varphi_b = \forall z \, \exists w \, \overbrace{\left(L(z,w) \rightarrow M(w,z)\right)}^{\theta}$

φ_b é válida em $(\mathcal{M}, V)$, pois, para todo o $a \in D$, existe algum $b \in D$, tal que, $\left(\mathcal{M}, V^{\frac{z}{a}\frac{w}{b}}\right) \models \theta$:

$V^{\frac{z}{1}\frac{w}{3}} \left(\underbrace{L(1,3)}_{1} \rightarrow \underbrace{M(3,1)}_{1}\right) = 1$

$V^{\frac{z}{3}\frac{w}{15}} \left(\underbrace{L(3,15)}_{1} \rightarrow \underbrace{M(15,3)}_{1}\right) = 1$

$V^{\frac{z}{5}\frac{w}{15}} \left(\underbrace{L(5,15)}_{1} \rightarrow \underbrace{M(15,5)}_{1}\right) = 1$

$V^{\frac{z}{15}\frac{w}{15}} \left(\underbrace{L(15,15)}_{0} \rightarrow \underbrace{M(15,15)}_{1}\right) = 1$,

pelo que, $(\mathcal{M}, V) \models \varphi_b$.

~~Nome~~ ~~N.º~~ ~~Folha supl. n.º~~ T1-ER5

4. Universo dos entrevistados : $|\mathcal{U}|=70$

Conjuntos não disjuntos dos que frequentam as praias

Vagueira : $|V|=20$

Costa Nova: $|C|=35$

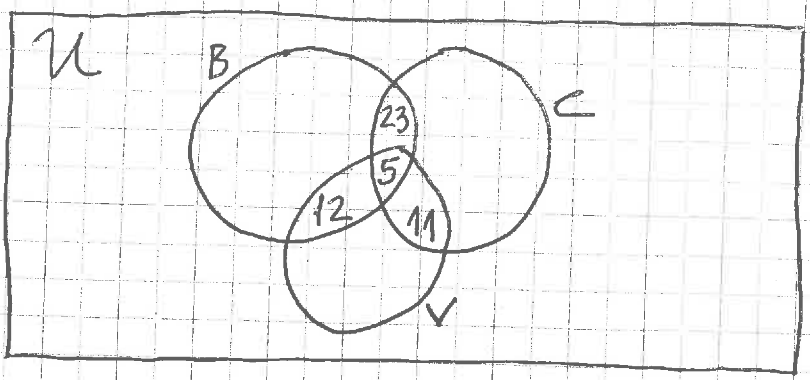
Barra : $|B|=47$

Barra e Vagueira: $|B\cap V|=12$

Barra e Costa Nova: $|B\cap C|=23$

Costa Nova e Vagueira: $|C\cap V|=11$

Barra, Costa Nova e Vagueira: $|B\cap C\cap V|=5$



Aplicando o princípio da inclusão-exclusão pode obter-se o nº de entrevistados que frequentam pelo menos uma das três praias B, C, V:

$$|B\cup C\cup V| = |B|+|C|+|V|-|B\cap C|-|B\cap V|-|C\cap V|+ \\ +|B\cap C\cap V|$$

$$= 47+35+20-(23+12+11)+5$$

$$= 102-46+5 = 56+5 = 61$$

Donde, o nº de entrevistados que frequenta a praia do Areão mas não frequenta nenhuma das outras 3 praias é dado por $|\mathcal{U}\setminus(B\cup C\cup V)| = |\mathcal{U}|-|B\cup C\cup V|$

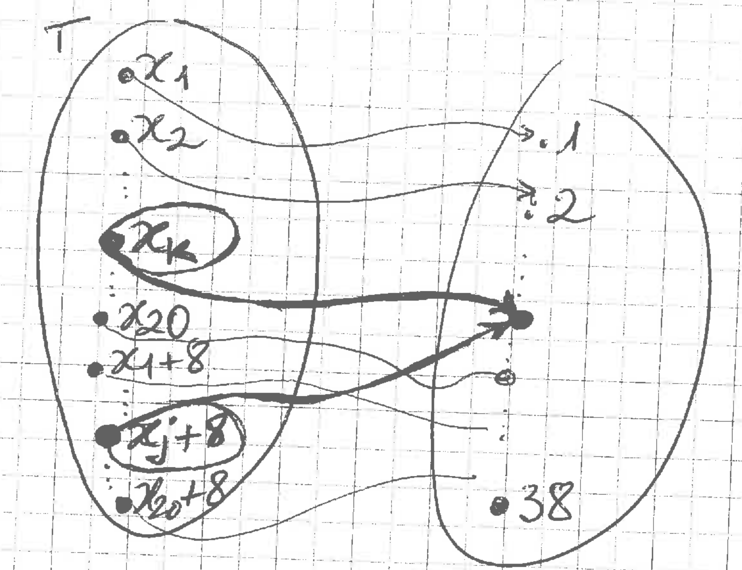
$$= 70-61 = 9.$$

Nome ~~~~ N.º ~~~~ Folha supl. n.º T1-ER6

5. Ora, como $x_1 = 1$ e $x_{20} = 30$, tem-se

$$1 \le \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_{20}}_{\text{20 termos distintos entre si}} \; + \; \underbrace{x_1+8, x_2+8, \dots, x_{20}+8}_{\text{20 termos distintos entre si}} \le 38$$

pelo que, existe uma função $f : T \longrightarrow \{1, 2, \dots, 38\}$,
com $T = \{\text{Termos em } x_i\} \cup \{\text{Termos em } x_i + 8\}$,
$|T| = 40 > 38$, ou seja, f não é injetiva,



pelo Princípio da Gaiola dos Pombos existem pelo menos dois elementos de T que são iguais, de índices j, k, $1 \le j < k \le 20$, tais que $x_k = x_j + 8$,
ou seja, $x_K - x_j = 8$ e, portanto, existem dois termos x_K e x_j cuja diferença é igual a 8.

6. O número de soluções inteiras que satisfazem a inequação

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5<20$, $x_i\in\{0,1,2,\dots\}$, $i=1,2,3,4,5$,

Coincide com o número de soluções inteiras da equação

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=19-x_6\ ,\quad x_6\in\{0,1,2,\dots\}$$

$\Leftrightarrow$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=19\ ,$$

que, por sua vez, coincide com o número de possibilidades de distribuir 19 bolas indistinguíveis por 6 caixas, sendo dado pelo número de combinações com repetição de 6 elementos 19 a 19:

$$\left(\!\binom{6}{19}\!\right)=\binom{6-1+19}{19}=\binom{24}{19}=\binom{24}{5}=\frac{24!}{19!\,5!}=$$

$$=\frac{24\times23\times22\times21\times20}{5!}$$

<u>Solução alternativa:</u> somatório das soluções de $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=k$, para $k\in\{0,1,\dots,19\}$

$$\sum_{k=0}^{19}\left(\!\binom{5}{k}\!\right)=\sum_{k=0}^{19}\binom{5+k-1}{k}=\sum_{k=0}^{19}\binom{k+4}{4}=\sum_{k=4}^{23}\binom{k}{4}$$

$$=\binom{23+1}{4+1}=\binom{24}{5}=\frac{24!}{19!\,5!}$$

~~Nome~~

~~N.º~~ ~~Folha supl. n.º~~ T1-ER8

7- Coeficiente de x^{10} em $p(x)=(1+x+x^2)^{52}$

$$(1+x+x^2)^{52}=\sum_{k_1+k_2+k_3=52}\binom{52}{k_1,k_2,k_3}\underbrace{1^{k_1}x^{k_2}(x^2)^{k_3}}_{x^{k_2+2k_3}}$$

$k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}_0$

Pretende-se $k_2+2k_3=10 \Leftrightarrow k_2=10-2k_3$ e $k_1+k_2+k_3=52 \Leftrightarrow k_1=52-k_2-k_3=52-(10-2k_3)-k_3$, pelo que, $k_1=42+k_3$; tomando $k_3=k\in\mathbb{N}_0$, têm-se os coeficientes de x^{10}, os quais satisfazem

$$\binom{52}{42+k,\,10-2k,\,k}=\frac{52!}{(42+k)!\,(10-2k)!\,k!},$$ resultando

em 6 coeficientes com $k=0,1,2,3,4,5$, sendo o coeficiente pedido dado por

$$\sum_{k=0}^{5}\binom{52}{42+k,\,10-2k,\,k}=\binom{52}{42,10,0}+\binom{52}{43,8,1}+$$

$$+\binom{52}{44,6,2}+\binom{52}{45,4,3}+\binom{52}{46,2,4}+\binom{52}{47,0,5}.$$

$$=\frac{52!}{42!\,10!\,0!}+\frac{52!}{43!\,8!\,1!}+\frac{52!}{44!\,6!\,2!}+\frac{52!}{45!\,4!\,3!}+\frac{52!}{46!\,2!\,4!}+\frac{52!}{47!\,0!\,5!}$$