Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1º Ano/2º Sem)

Teste T2 (Avaliação Discreta) - 19/06/2024 **Duração: 2h**

1. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (-3)^n & , \ n \geq 2, \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \ . \end{cases}$$

Resolva a equação de recorrência dada, de modo a obter uma fórmula fechada para $a_n, \ n \geq 0$.

2. Num lançamento de um dado de seis faces pode obter-se de 1 a 6 pontos. Pretende-se determinar o número de possibilidades de, num lançamento simultâneo de quatro dados iguais, se obter um total de n pontos ($n \geq 4$).

   (a) Mostre que a função geradora associada à solução do problema é dada por

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x^4\left(1-x^6\right)^4}{(1-x)^4}$$

   (b) A partir da função geradora $\mathcal{A}(x)$ determine o número de possibilidades de se obter um total de $n = 15$ pontos.

3. Seja $\oplus$ uma operação de soma e $(S_n)_{n\geq 0}$ a sucessão $S_n = n \oplus (n+3), \ n \geq 0$, satisfazendo as seguintes igualdades:

$$0\oplus 3 = 3, \ \ 1\oplus 4 = 8, \ \ 2\oplus 5 = 15, \ \ 3\oplus 6 = 24, \ \ 4\oplus 7 = 35, \ \ \ldots \ \ , \ \ n\oplus(n+3) = n(n+4)+3, \ \ \ \ldots$$

Estabeleça uma relação de recorrência que descreva o termo geral da sucessão $(S_n)_{n\geq 0}$ e mostre que a sucessão S_n é solução dessa relação de recorrência, indicando também as respetivas condições iniciais.

4. Considere a seguinte matriz de custos W relativa a um grafo $G = (V, E, W)$ cujo conjunto de vértices é $V = \{u, v, w, x, y, z\}$:

$$W = \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u & v & w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 6 & \infty & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 3 & \infty \\ 3 & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ 6 & 1 & 4 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & 3 & \infty & 1 & 0 & 3 \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Desenhe o grafo G e aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de menor custo entre os vértices u e y, e indique o custo desse caminho.
   Nota: Apresente todos os passos (iterações) do algoritmo através de uma tabela adequada.

   (b) Seja H o subgrafo de G induzido pelo subconjunto de vértices $\{u, v, w, x, y\} \subset V$. Verifique que H contém 8 arestas e, aplicando a fórmula recursiva $\tau(H) = \tau(H - \alpha) + \tau(H//\alpha)$, onde α é uma aresta de H que não é lacete, determine o número de árvores abrangentes de H, $\tau(H)$.

   (c) Obtenha, justificando, um subgrafo abrangente de G que seja conexo e bipartido, indicando a respetiva bipartição do conjunto dos seus vértices.

Formulário: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n = \frac{1}{(1-\alpha x)}, \ \alpha \in \mathbb{R}\,;$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}(\alpha x)^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^k}, \ k \in \mathbb{N}.$

Cotações:

1.	**2.(a)**	**2.(b)**	**3.**	**4.(a)**	**4.(b)**	**4.(c)**
3.0	2.5	2.5	2.0	4.5	3.0	2.5