Classificação:_________

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Teste T2 (Avaliação Discreta) - 19/06/2024 Duração: 2h

NOME: Exemplo de Resolução ______ NMec: _________

CURSO: ______________________ Folhas Supl.: _________

A - Bloco Questão 1

1. (3.0) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (-3)^n \quad , \ n \geq 2, \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \ . \end{cases}$$

Resolva a equação de recorrência dada, de modo a obter uma fórmula fechada para a_n, $n \geq 0$.

A eq. de recorrência dada é linear não homogénea, com solução geral $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$, onde $a_n^{(h)}$ corresponde à solução da parte homogénea $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, da qual resulta a eq. característica $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$, pelo que 3 é raiz caract. c/ mult. $m=2$, vindo $a_n^{(h)} = (C_0 + C_1 n)3^n$, C_0 e C_1 const. a det.; $a_n^{(p)}$ é a solução particular associada a

(1) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = (-3)^n$, como (-3) não é solução da eq. caract., $a_n^{(p)} = A(-3)^n$ e substituindo em (1) determina-se a constante A:

$$A(-3)^n - 6A(-3)^{n-1} + 9A(-3)^{n-2} = (-3)^n$$

$$\Leftrightarrow A(-3)^n - \frac{6A(-3)^n}{(-3)} + \frac{9A(-3)^n}{(-3)^2} = (-3)^n$$

$$\Leftrightarrow A(-3)^n + 2A(-3)^n + A(-3)^n = (-3)^n$$

$$\Leftrightarrow 4A(-3)^n = (-3)^n \Leftrightarrow 4A = 1 \Leftrightarrow A = 1/4$$

Donde,

$$a_n = (C_0 + C_1 n)\,3^n + \frac{1}{4}(-3)^n$$

e, atendendo às condições iniciais

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$, podem calcular-se as

constantes C_0 e C_1:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 + \frac{1}{4} = 1 \\ (C_0 + C_1)3 + \frac{1}{4}(-3) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = 3/4 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \left(\frac{3}{4} + C_1\right)3 = 3 + \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \frac{3}{4} + C_1 = \frac{1}{3} \times \frac{15}{4} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = 3/4 \\ C_1 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = 1/2 \end{cases}.$$

Logo, $a_n = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}n\right)3^n + \frac{1}{4}(-3)^n, \; n \geq 0.$

Classificação:_________

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Teste T2 (Avaliação Discreta) - 19/06/2024 **Duração: 2h**

NOME:____ **NMec**: _________

CURSO:______________________________________ **Folhas Supl.**: _________

B - Bloco Questão 2

Formulário: $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n = \frac{1}{(1-\alpha x)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}(\alpha x)^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

2. (5.0) Num lançamento de um dado de seis faces pode obter-se de 1 a 6 pontos. Pretende-se determinar o número de possibilidades de, num lançamento simultâneo de quatro dados iguais, se obter um total de n pontos ($n \geq 4$).

(a) (2.5) Mostre que a função geradora associada à solução do problema é dada por

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x^4\left(1-x^6\right)^4}{(1-x)^4}$$

(b) (2.5) A partir da função geradora $\mathcal{A}(x)$ determine o número de possibilidades de se obter um total de $n = 15$ pontos.

(a) O número de possibilidades de se obter de 1 a 6 pontos com o lançamento de um dado está associado à funçã geradora $x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$, por isso, a funçã geradora correspondente à soluçã do problema é

Lançamento de 4 dados iguais

$$\mathcal{A}(x) = \left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^4$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}(x) = \left(x\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\right)^4$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}(x) = x^4\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}(x) = x^4\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n - \sum_{n=6}^{\infty}x^n\right)^4,$$

$$\mathcal{A}(x) = x^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - x^6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^4$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{A}(x) = x^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x^6) \right)^4$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{A}(x) = x^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^4 (1-x^6)^4 = \frac{x^4 (1-x^6)^4}{(1-x)^4} \quad \underline{\text{cqd}}$$

com $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

(b) O coeficiente de x^{15} em $\mathcal{A}(x)$ dá o número de lançamentos onde são obtidos $n=15$ pontos:

$$\mathcal{A}(x) = x^4 (1-x^6)^4 \frac{1}{(1-x)^4} = x^4 \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 1^{4-k} (-x^6)^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4-1}{n} x^n$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{A}(x) = (\underbrace{1 - 4x^6}_{} + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{n} \underbrace{x^{n+4}}_{}$$

apenas interessam os termos com $k=0$ e $n=11$, $k=1$ e $n=5$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{A}(x) = \cdots + \underbrace{\left[\binom{11+3}{11} - 4\binom{5+3}{5} \right]}_{\text{coeficiente pedido é igual a}} x^{15} + \cdots,$$

$$\binom{14}{11} - 4\binom{8}{5} = \frac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2} - 4 \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2}$$

$$= 14 \times 13 \times 2 - 4 \times 8 \times 7$$

$$= 364 - 224$$

$$= 140$$

Classificação:_________

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Teste T2 (Avaliação Discreta) - 19/06/2024 **Duração: 2h**

NOME:______________________________________ **NMec**: _________

CURSO:__________________________________ **Folhas Supl.**: _________

C - Bloco Questão 3

3. (2.0) Seja $\oplus$ uma operação de soma e $(S_n)_{n\geq 0}$ a sucessão $S_n = n \oplus (n+3)$, $n \geq 0$, satisfazendo as seguintes igualdades:

$$0 \oplus 3 = 3,\ \ 1 \oplus 4 = 8,\ \ 2 \oplus 5 = 15,\ \ 3 \oplus 6 = 24,\ \ 4 \oplus 7 = 35,\ \ \ldots\ \ ,\ \ n \oplus (n+3) = n(n+4)+3,\ \ \ldots$$

Estabeleça uma relação de recorrência que descreva o termo geral da sucessão $(S_n)_{n\geq 0}$ e mostre que a sucessão S_n é solução dessa relação de recorrência, indicando também as respetivas condições iniciais.

Observando os termos da sucessão $(S_n)_{n\geq 0}$, tem-se

$S_0 = 0 \oplus 3 = 0(0+4)+3 = 3$

$S_1 = 1 \oplus 4 = 1(1+4)+3 = 8$ $\quad 2+5 = 2n+3$, c/ $n=1$,

$S_2 = 2 \oplus 5 = 2(2+4)+3 = 15$ $\quad 2+7 = 2n+3$, c/ $n=2$,

$S_3 = 3 \oplus 6 = 3(3+4)+3 = 24$, $\quad 2+9 = 2n+3$, c/ $n=3$,

...

Ou seja, $(1)\begin{cases} S_n = S_{n-1} + 2n+3, & n \geq 1, \\ S_0 = 3 \end{cases}$

Mostrar que a sucessão $(S_n)_{n\geq 0}$, com $S_n = n(n+4)+3$, satisfaz (1): $S_0 = 3$ e $S_n = S_{n-1} + 2n+3$, $n \geq 1$,

i.e., $n(n+4)+3 = (n-1)(n-1+4)+3+2n+3$

$\Leftrightarrow n^2+4n+3 = (n-1)(n+3)+2n+6$

$\Leftrightarrow n^2+4n+3 = n^2+3n-n-3+2n+6$

$\Leftrightarrow n^2+4n+3 = n^2+4n+3$ c.q.d.

Classificação:__________

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Teste T2 (Avaliação Discreta) - 19/06/2024 **Duração: 2h**

NOME:____ **NMec:** __________

CURSO:____________________________________ **Folhas Supl.:** __________

D - Bloco Questão 4

---

4. (10.0) Considere a seguinte matriz de custos W relativa a um grafo $G = (V, E, W)$ cujo conjunto de vértices é $V = \{u, v, w, x, y, z\}$:

$$W = \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u & v & w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 6 & \infty & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 3 & \infty \\ 3 & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ 6 & 1 & 4 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & 3 & \infty & 1 & 0 & 3 \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

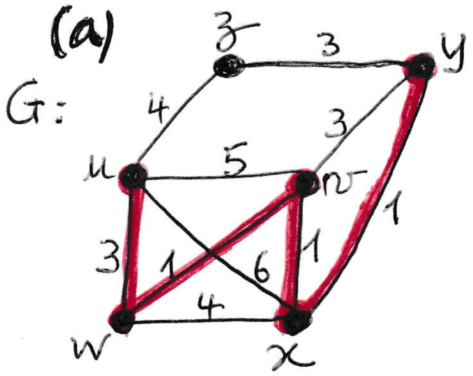
(a) (4.5) Desenhe o grafo G e aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de menor custo entre os vértices u e y, e indique o custo desse caminho.

Nota: Apresente todos os passos (iterações) do algoritmo através de uma tabela adequada.

(b) (3.0) Seja H o subgrafo de G induzido pelo subconjunto de vértices $\{u, v, w, x, y\} \subset V$. Verifique que H contém 8 arestas e, aplicando a fórmula recursiva $\tau(H) = \tau(H - \alpha) + \tau(H//\alpha)$, onde α é uma aresta de H que não é lacete, determine o número de árvores abrangentes de H, $\tau(H)$.

(c) (2.5) Obtenha, justificando, um subgrafo abrangente de G que seja conexo e bipartido, indicando a respetiva bipartição do conjunto dos seus vértices.

(a)



u	v	w	x	y	z	menor	temporários
$\boxed{(0,-)}$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	u	$\{v,w,x,y,z\}$
	$(5,u)$	$\boxed{(3,u)}$	$(6,u)$	$(\infty,-)$	$(4,u)$	w	$\{v,x,y,z\}$
	$\boxed{(4,w)}$		$(6,u)$	$(\infty,-)$	$(4,u)$	v	$\{x,y,z\}$
			$(5,v)$	$(7,v)$	$\boxed{(4,u)}$	z	$\{x,y\}$
			$\boxed{(5,v)}$	$(7,v)$		x	$\{y\}$
				$\boxed{(6,x)}$		y	$\emptyset$

marca(y) antecessor(y)=x

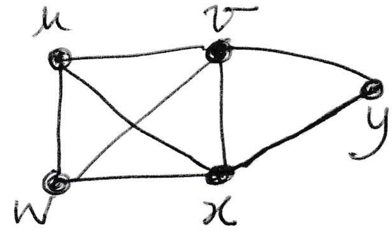
Caminho de custo mínimo: (u, w, v, x, y)

de custo mínimo $=$ marca$(y) = 6$

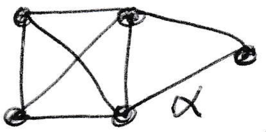
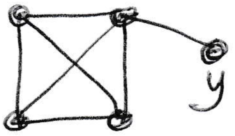
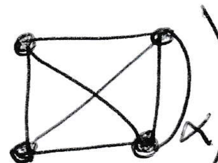
4.1

(b) $H=(V_H, E_H)$

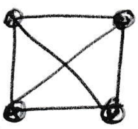
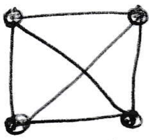
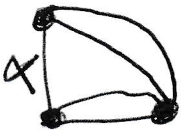
$|E_H|=8$



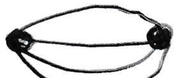
$\tau(H)=\tau(H-\alpha)+\tau(H/\!/\alpha)$, α aresta que não é lacete:

$\tau\Big($  $\Big)=\tau\Big($  $\Big)+\tau\Big($  $\Big)=$

$d_H(y)=1$ (folha)

$=\tau\Big($  $\Big)+\tau\Big($  $\Big)+\tau\Big($  $\Big)$

K_4 $\qquad$ K_4

$=2\,\tau(K_4)+\tau\Big($  $\Big)+\tau\Big($  $\Big)$

$=2\times 4^{4-2}+\tau\Big($  $\Big)\times\tau\Big($  $\Big)+4$

fórmula de Cayley $\qquad$ v_C: vértice de corte

$=2\times 16+2\times 2+4=32+8=40$

(c) Seja o subgrafo abrangente de G (o conjunto de vértices é V)

Como não tem ciclos de comprimento ímpar é bipartido, com $A=\{u,v,y\}$ e $B=\{w,x,z\}$ todas as arestas são da forma ab, $a\in A$ e $b\in B$, obtendo-se a bipartição de $V=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$. O subgrafo é conexo porque existe um caminho entre quaisquer par de vértices de V.