Matemática Discreta

Ano Letivo 2023/24 (Versão: 12 de Maio de 2024)

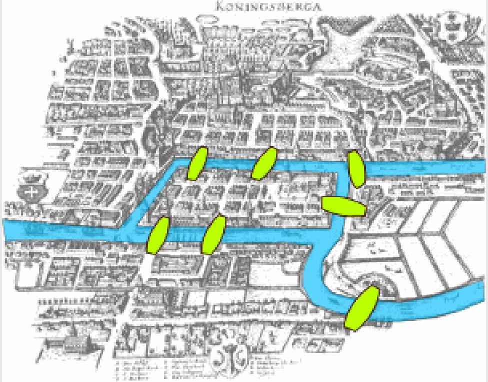
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo V
Elementos de Teoria dos Grafos

Parte I
Conceitos básicos

Introdução

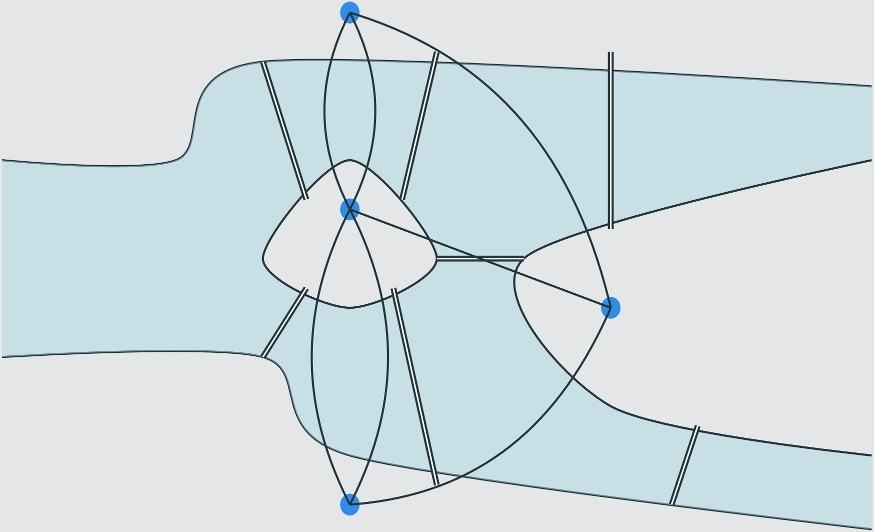
Fazer um passeio ...



Será possível cruzar as sete pontes de Königsberg numa caminhada contínua sem passar duas vezes por uma delas? Veremos neste capítulo porque a resposta é «Não» ...

Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático suíço.

Um modelo matemático



Índice

1. Conceitos fundamentais de teoria dos grafos

Definição (grafo não orientado)

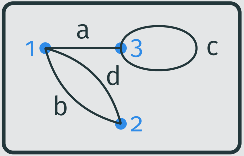
Designa-se por **grafo (não orientado)** um terno $G = (V, E, \psi)$ onde

- V é um conjunto (os elementos de V chamamos vértices),
- E é um conjunto (os elementos de E chamamos arestas, tipicamente E é disjunto de V),
- ψ é uma função (a função de incidência do grafo)

$$\psi \colon E \longrightarrow \{A \subseteq V \mid 1 \leq |A| \leq 2\}.$$

Se $\psi(a) = \{u, v\}$, u e v dizem-se os pontos extremos da aresta a.

Exemplo



$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{a, b, c, d\},$

$\psi(a) = \{1, 3\},\ \psi(b) = \{1, 2\},\ \psi(c) = \{3\},$
$\psi(d) = \{1, 2\} = \{2, 1\}.$

Definição (grafo orientado)

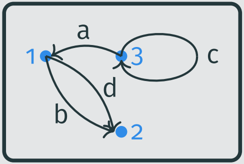
Designa-se por **grafo orientado** (ou **digrafo**) um terno $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ onde

- V é um conjunto (os elementos de V chamamos vértices),
- E é um conjunto (os elementos de E chamamos arcos, tipicamente E é disjunto de V),
- ψ é uma função (a função de incidência do grafo)

$$\psi\colon E \longrightarrow V \times V.$$

Se $\psi(a) = (u, v)$, u diz-se cauda de a e v cabeça de a.

Exemplo



$$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{a, b, c, d\},$$

$$\psi(a) = (3, 1), \ \psi(b) = (1, 2), \ \psi(c) = (3, 3), \ \psi(d) = (1, 2).$$

Grafos orientados vs. não-orientados

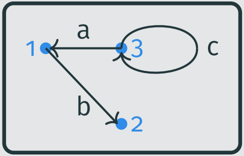
A cada grafo orientado $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ podemos associar um grafo não orientado $G = (V, E, \widehat{\psi})$ onde

$$\widehat{\psi}(a) = \{u, v\} \text{ precisamente quando } \psi(a) = (u, v) \text{ ou } \psi(a) = (v, u)$$

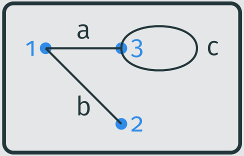
(ou seja, esquecemos a direção dos arcos).

Desde modo, vários conceitos de grafos aplicam-se igualmente aos digrafos.

Exemplo



$\longmapsto$



Definição

Consideremos um grafo $G = (V, E, \psi)$ respetivamente um digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$.

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se **lacete**.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por **arcos paralelos**.
- G (respetivamente $\overrightarrow{G}$) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.
- Uma aresta (um arco) diz-se **incidente** nos seus vértices extremos.
- Os vértices u e v dizem-se **adjacentes** se existe uma aresta (um arco) com pontos extremos u e v.
- Arestas (arcos) incidentes num mesmo vértice dizem-se **adjacentes**.

as arrestas a e b são adjacentes.

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ respetivamente digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ diz-se **finito** quando os conjuntos V e E são finitos.

Nota

No que se segue, consideremos tipicamente grafos finitos.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- **ordem de G:** $\nu(G) = |V|$ (o número de vértices).
- **dimensão de G:** $\epsilon(G) = |E|$ (o número de arestas).

(E da forma igual para digrafos.)

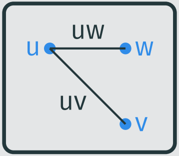
2. Grafos simples

Recordamos:

Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes. (Di)Grafos não simples denota-se também por **multi(di)grafo**.

Nota

Num grafo (respetivamente digrafo) simples, cada aresta (arco) a é completamente determinada(o) pelos vértices extremos u e v (cauda u e cabeça v). Neste caso escrevemos da forma mais sugestivo uv em lugar de a.



Com esta notação, o (di)grafo (V, E, ψ) é completamente determinado por (V, E) (ou seja, podemos «dispensar» ψ).

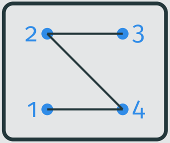
Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O **grafo complementar** de G é o grafo $G^{\complement} = (V, E^{\complement})$ com o mesmo conjunto de vértices e com

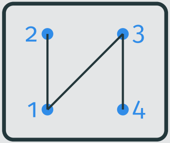
$$uv \in E^{\complement} \iff uv \notin E.$$

Exemplo

G



$G^{\complement}$



Nota

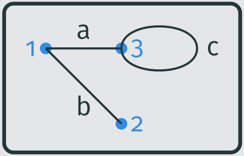
Portanto, $(G^{\complement})^{\complement} = G$.

3. Vizinhança e grau

Definição

- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e $v \in V$. O conjunto de todos os vértices adjacentes a v designa-se por **vizinhança** de v e denota-se por $\mathcal{N}_G(v)$ (ou simplesmente $\mathcal{N}(v)$).
- Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo e $v \in V$. A **vizinhança de entrada** de v é o conjunto $\mathcal{N}^-(v)$ de todos os vértices u tal que existe um $e \in E$ com $\psi(e) = (u, v)$, e a **vizinhança de saída** de v é o conjunto $\mathcal{N}^+(v)$ de todos os vértices u tal que existe um $e \in E$ com $\psi(e) = (v, u)$.

Exemplo

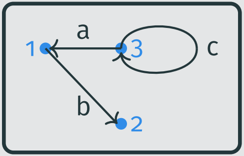


$$\mathcal{N}(1) = \{2, 3\},$$
$$\mathcal{N}(2) = \{1\},$$
$$\mathcal{N}(3) = \{1, 3\}.$$

Definição

- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e $v \in V$. O conjunto de todos os vértices adjacentes a v designa-se por **vizinhança** de v e denota-se por $\mathcal{N}_G(v)$ (ou simplesmente $\mathcal{N}(v)$).
- Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo e $v \in V$. A **vizinhança de entrada** de v é o conjunto $\mathcal{N}^-(v)$ de todos os vértices u tal que existe um $e \in E$ com $\psi(e) = (u, v)$, e a **vizinhança de saída** de v é o conjunto $\mathcal{N}^+(v)$ de todos os vértices u tal que existe um $e \in E$ com $\psi(e) = (v, u)$.

Exemplo



$$\mathcal{N}^-(1) = \{3\},\ \mathcal{N}^+(1) = \{2\},\ \mathcal{N}(1) = \{2, 3\}$$
$$\mathcal{N}^-(2) = \{1\},\ \mathcal{N}^+(2) = \varnothing,\ \mathcal{N}(2) = \{1\}$$
$$\mathcal{N}^-(3) = \{3\},\ \mathcal{N}^+(3) = \{1, 3\},\ \mathcal{N}(3) = \{1, 3\}$$

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- Seja $v \in V$. O **grau** de v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v (onde cada lacete conta duas vezes).
- O **maior grau dos vértices** do grafo G denota-se por $\Delta(G)$:
$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$
- O **menor grau dos vértices** do grafo G denota-se por $\delta(G)$:
$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

Nota

No caso de um digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$, consideremos ainda

- **o semigrau de entrada**: $d^-(v) = |\{e \mid \exists u \in V\ \psi(e) = (u, v)\}|$.
- **o semigrau de saida**: $d^+(v) = |\{e \mid \exists u \in V\ \psi(e) = (v, u)\}|$.
- **Nota**: $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$.

Exemplo

O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.

Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou:

> *se me excluir a mim todos deram um número diferente de apertos de mão.*

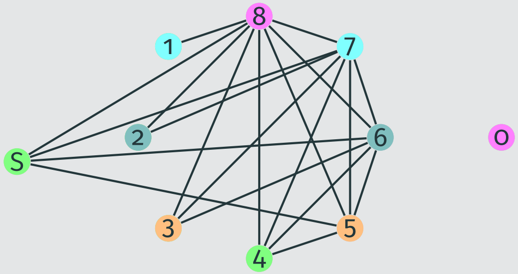
Quantos apertos de mão deu o Sr. Silva?

É claro que os membros de um mesmo casal não se cumprimentaram um ao outro, pelo que o número de cumprimentos variou entre 0 e 8.

Por outro lado, uma vez que, excluindo o Sr. Silva, todas as restantes 9 pessoas deram um número diferente de apertos de mão, podemos atribuir a cada uma delas exactamente um índice j entre 0 e 8 que corresponde ao número de apertos de mão que deu.

Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:

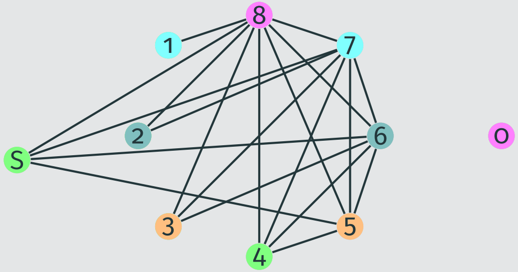


Portanto:

- O vértice n_0 tem grau $d(n_0) = 0$; portanto, nenhuma aresta pode ter um extremo em n_0.

Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



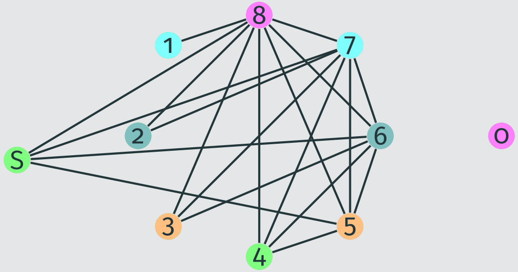
Portanto:

- Uma vez que o n_8 deu 8 apertos de mão, ele apertou a mão a toda a gente, com exceção dele(a) próprio(a) e da mulher/do marido … logo, n_0 e n_8 são casados.

  Já temos $d(n_0) = 0$, $d(n_8) = 8$ e $d(n_1) = 1$, pelo que não pode haver mais arestas com extremos nestes vértices.

Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



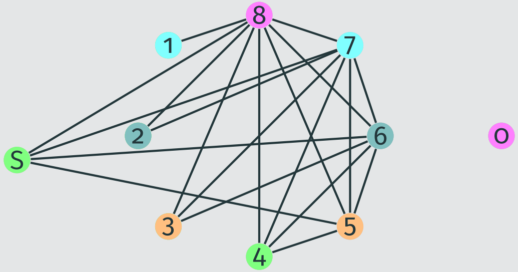
Portanto:

- Por sua vez, n_7 só não apertou a mão a ele próprio, a n_0 e n_1 (uma vez que este último só deu um aperto de mão e foi a n_8).

  Logo, n_7 e n_1 são casados e já temos $d(n_2) = 2$.

Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



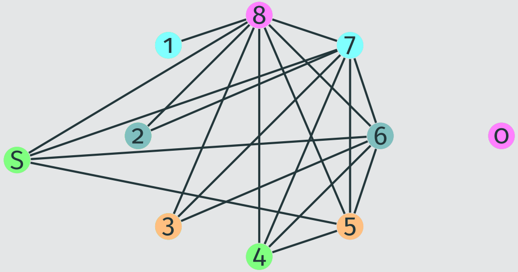
Portanto:

- Por sua vez, n_6 só não deu apertos de mão a si próprio, a n_0, n_1 e n_2 (note-se que este último deu um aperto de mão a n_8 e n_7).

  Logo, n_2 e n_6 são casados e já temos $d(n_3) = 3$.

Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



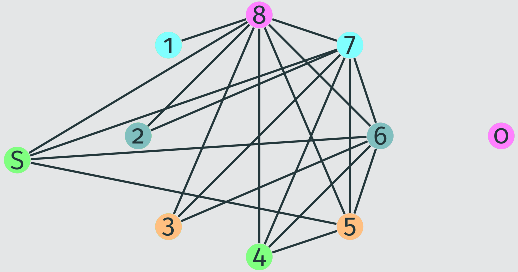
Portanto:

- O n_5 apertou a mão de n_8, n_7, n_6, n_4 e ao Sr. Silva e, consequentemente, é casado com n_3.

  Assim, n_4 é a Sra. Silva (que, naturalmente, não deu um aperto de mão ao Sr. Silva) e ficam determinados todos os apertos de mão.

Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

O Sr. Silva apertou a mão a n_8, n_7, n_6 e n_5.

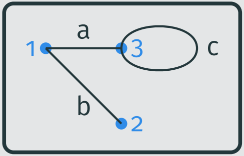
A matriz de incidência

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo não orientado (finito). A **matriz de incidência** (aresta-vértice) de G é a matriz do tipo $\nu \times \epsilon$ definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (v, a) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } v \notin \psi(a), \\ 1 & \text{se } \psi(a) = \{u, v\} \text{ com } u \neq v, \\ 2 & \text{se } \psi(a) = \{v\}. \end{cases}$$

Nota: Para cada $a \in E$, a soma sobre todos os elementos da «coluna a» é 2. Para cada $v \in V$, a soma sobre todos os elementos da «linha v» é o grau de v.

Exemplo



	a	b	c
1	1	1	0
2	0	1	0
3	1	0	2

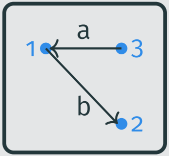
A matriz de incidência

Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo sem lacetes (finito). A **matriz de incidência** (aresta-vértice) de $\overrightarrow{G}$ é a matriz do tipo $\nu \times \epsilon$ definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, a) \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (u, v) = \psi(a), \\ 1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (v, u) = \psi(a), \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Nota: Para cada $a \in E$, a soma sobre todos os elementos da «coluna a» é 0. Para cada $v \in V$, a soma dos valores absolutos dos elementos da «linha v» é igual ao grau de v, $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$.

Exemplo



	a	b
1	-1	1
2	0	-1
3	1	0

Teorema

Para todo o grafo não orientado $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de G:

- Para cada «linha v», a soma das entradas desta linha é igual ao $d(v)$. Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à $\sum_{v \in V} d(v)$.
- Para cada «coluna a», a soma das entradas desta coluna é igual à 2. Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à $2|E|$. $\square$

Teorema

Para todo o grafo não orientado $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar é par.

Teorema

Para todo o digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ finito,

$$\sum_{v \in V} d^{+}(v) = \sum_{v \in V} d^{-}(v) = |E|.$$

As matrizes de adjacência

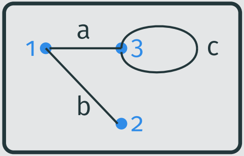
- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo não orientado (finito). A **matriz de adjacência** de G é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ com entrada (u, v) igual a número de arestas entre u e v (cada lacete conta duas vezes).

  Nota: Esta matriz é simétrica e a soma sobre os elementos da coluna u (ou linha u) é igual ao grau de u.

- Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo (finito). A **matriz de adjacência** de $\overrightarrow{G}$ é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ definida por

$$V \times V \longmapsto \mathbb{R}, \quad (u, v) \longmapsto |\{a \in E \mid \psi(a) = (u, v)\}|.$$

Exemplo



	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	0	2

As matrizes de adjacência

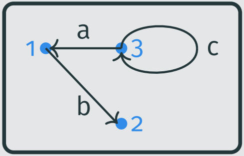
- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo não orientado (finito). A **matriz de adjacência** de G é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ com entrada (u, v) igual a número de arestas entre u e v (cada lacete conta duas vezes).

  Nota: Esta matriz é simétrica e a soma sobre os elementos da coluna u (ou linha u) é igual ao grau de u.

- Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo (finito). A **matriz de adjacência** de $\overrightarrow{G}$ é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ definida por

$$V \times V \longmapsto \mathbb{R}, \quad (u, v) \longmapsto |\{a \in E \mid \psi(a) = (u, v)\}|.$$

Exemplo



	1	2	3
1	0	1	0
2	0	0	0
3	1	0	1

4. Isomorfismos de grafos e subgrafos

Definição

Sejam os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$. Um **isomorfismo** de G em H é um par $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ e $h\colon E_G \longrightarrow E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

No caso de digrafos, escreve-se (u, v) e $(f(u), f(v))$ em vez de $\{u, v\}$ e de $\{f(u), f(v)\}$, respetivamente.

Nota

No caso de grafos simples, e denotando as arestas da forma «uv», a função h acima é completamente determinada por f:

$$h(uv) = f(u)f(v).$$

Portanto, um isomorfismo entre grafos simples (V_G, E_G) e (V_H, E_H) é dado por uma função bijetiva $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ tal que, para todos os $u, v \in V_G$:

$$uv \in E_G \implies f(u)f(v) \in E_H.$$

Definição

Sejam os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$. Um **isomorfismo** de G em H é um par $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ e $h\colon E_G \longrightarrow E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

No caso de digrafos, escreve-se (u, v) e $(f(u), f(v))$ em vez de $\{u, v\}$ e de $\{f(u), f(v)\}$, respetivamente.

Nota

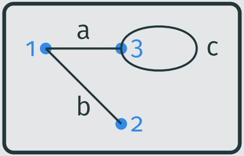
- Para cada grafo $G = (V, E, \psi)$, as identidades $\mathrm{id}_V\colon V \longrightarrow V$ e $\mathrm{id}_E\colon E \longrightarrow E$ definem um isomorfismo de G em G.
- Para cada isomorfismo de G em H, as funções $f^{-1}\colon V_H \longrightarrow V_G$ e $h^{-1}\colon E_H \longrightarrow E_G$ definem um isomorfismo de H em G.
- As compostas de isomorfismos são isomorfismos.

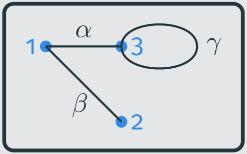
Definição

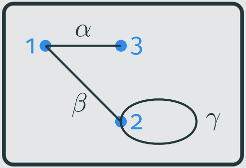
(Di)grafos G e H dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles, e escreve-se $G \simeq H$ neste caso.

Nota

Intuitivamente, grafos isomorfos são «iguais a menos da etiquetação dos vértices e aresta».







Definição

(Di)grafos G e H dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles, e escreve-se $G \simeq H$ neste caso.

Nota

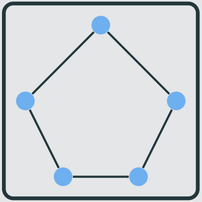
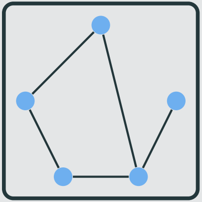
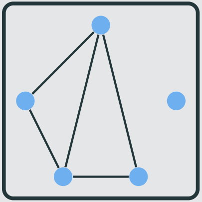
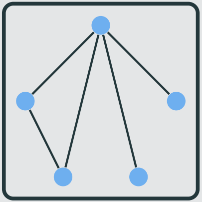
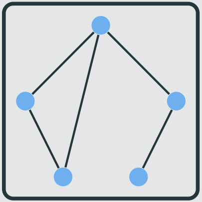
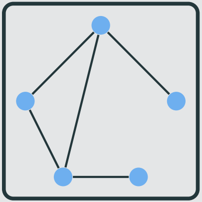
Grafos isomorfos têm «as mesmas propriedades».

Mais concretamente, sendo o par $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ e $h\colon E_G \longrightarrow E_H$ um isomorfismo entre os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ (finitos). Então:

- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão:
$$\nu(G) = \nu(H) \quad \text{e} \quad \epsilon(G) = \epsilon(H).$$
- G é simples se e só se H é simples.
- Vértices correspondentes têm o mesmo grau:
$$\text{para cada } v \in V_G,\ d_G(v) = d_H(\varphi(v)).$$
- Portanto: $\Delta(G) = \Delta(H) \quad \text{e} \quad \delta(G) = \delta(H).$

Exemplo

Representação gráfica de todos os grafos simples não isomorfos, com 5 vértices e 5 arestas:

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. O grafo H diz-se **subgrafo** de G quando $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto E_H.

Neste caso também se diz que G é um **supergrafo** de H.

Nota

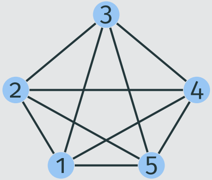
Cada grafo é subgrafo de si próprio. Se H é um subgrafo de G e $H \neq G$, então diz-se que H é um subgrafo próprio de G.

Definição

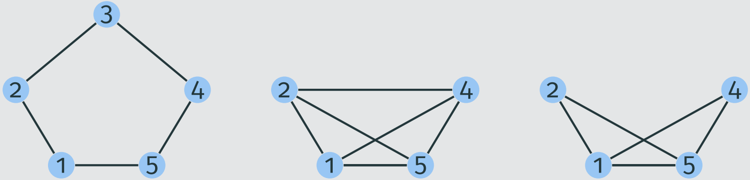
Um subgrafo $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ de $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ diz-se **abrangente** quando $V_H = V_G$.

Exemplos

Considere o seguinte grafo G.



Alguns subgrafos de G:



Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

- O **subgrafo $G[\widehat{V}]$ de G induzido por $\widehat{V}$** é o grafo cujo conjunto de vértices é $\widehat{V}$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.
- O **subgrafo $G[\widehat{E}]$ de G induzido por $\widehat{E}$** é o grafo cujo conjunto de arestas é $\widehat{E}$ e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $\widehat{E}$.

Nota

Tem-se $G = G[V]$ mas em geral $G[E] \neq G$. Por exemplo, para o grafo G

o grafo $G[E]$ é o grafo

De facto, $G[E] = G$ se e só se G não têm vértices isolados.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

- O **subgrafo** $G[\widehat{V}]$ **de** G **induzido por** $\widehat{V}$ é o grafo cujo conjunto de vértices é $\widehat{V}$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.
- O **subgrafo** $G[\widehat{E}]$ **de** G **induzido por** $\widehat{E}$ é o grafo cujo conjunto de arestas é $\widehat{E}$ e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $\widehat{E}$.

Nota

- Por definição, $G[V - \widehat{V}]$ é o sugrafo gerado pelo complemento de $\widehat{V}$, e escrevemos simplesmente $G - \widehat{V}$. Ainda mais, se $\widehat{V} = \{v\}$, escreve-se simplesmente $G - v$.
- Denota-se por $G - \widehat{E}$ o subgrafo abrangente cujo conjunto de arestas é $E - \widehat{E}$. Se $\widehat{E} = \{e\}$ escreve-se simplesmente $G - e$.

  Atenção: Em geral $G[E - \widehat{E}]$ e $G - \widehat{E}$ são distintos.