TITLE Chapt 1-2

MATEMÁTICA DESCRETA

INDEX

NOTE

LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM E DEMONSTRAÇÃO AUTOMÁTICA

Proposição: Afirmação que é V ou F

- $\sqrt{2}$ é um número racional ✓
- n é um número par ✗

Dois tipos:

Atômicas: p. onde o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido

Compostas: p. compostas por outras, ligadas por conectivos (o valor depende do valor dos componentes)

Conectivos

- $\wedge$ Conjunção (e..., mas ...)
- $\vee$ Disjunção (ou..., excepto se ...)
- $\neg$ Negação (não ...)
- $\rightarrow$ Implicação/Condicional (se ... então ..., implica ..., só se ...)
- $\leftrightarrow$ Equivalência (se e só se ...)

TABELAS DE VERDADE

- $\bot$ 0 FALSO CONTRADIÇÃO SEMPRE FALSO
- $\top$ 1 VERDADEIRO TAUTOLOGIA SEMPRE VERDADE
- CONSISTENTE — ALGUMA VERDADE
- $\equiv$ (EQUIVALENTES) — FÓRMULA $\psi \leftrightarrow \varphi$ É TAUTOLOGIA

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

LEIS DE DE MORGAN

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ $\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

FORMA NORMAL CONJUNTIVA (FNC)

$(p \underline{\vee} q) \underline{\wedge} (p \underline{\vee} r) \underline{\wedge} \neg r$

FORMA NORMAL DISJUNTIVA (DNF)

$(p \underline{\wedge} q) \underline{\vee} (p \underline{\wedge} r) \underline{\vee} \neg r$

NOTA: $p \wedge q \wedge r$ é $\underset{(p)\wedge(q)\wedge(\neg r)}{\text{CNF}}$ e $\underset{(p \wedge q \wedge \neg r)}{\text{DNF}}$

NOTA:

- $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

EXEMPLO:

$$\varphi = ((p \leftrightarrow q) \to (r \to s)) \wedge (q \to \neg(p \wedge r))$$

para FNC

1. $(\leftrightarrow)$ para $(\to)$

$$(((p \to q) \wedge (q \to p) \to (r \to s)) \wedge (q \to \neg(p \wedge r))$$

2. $(p \to q \equiv \neg p \vee q)$

$$(\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \vee (\neg r \vee s)) \wedge (\neg q \vee \neg(p \wedge r))$$

3. TRATAR DAS NEGAÇÕES

$$(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee (\neg r \vee s) \wedge \neg q \vee \neg(p \vee r))$$

$$((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee \neg r)$$

NOTA: Consistente HÁ UMA INTERPRETAÇÃO EM QUE TODAS AS FÓRMULAS SÃO VERDADEIRAS

Ex: $\Gamma = \{\neg p, p \to q, q\}$

$p \to 0 \;,\; q \to 1$

Consequência ($\models$)

Ex: $\underline{p \vee q}$, $\underline{p \to q} \models \underline{q \vee \neg p}$ → $\underline{e}$ $p \vee q$ e $p \to q$ forem 1, $q \vee \neg p$ tem de ser $\underline{1}$

Quando $p \vee q$ e $p \to q$ forem 1
$q \vee \neg p$ tem de ser $\underline{1}$

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1
0	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1
1	0	0	0	0
1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1

Método de Resolução

Ex: $p \to q$, $q \to r \models p \to r$, temos as fórmulas

$p \to q$ $\quad q \to r$ $\quad \neg(p \to r)$, temos as cláusulas

$\neg p \vee q$ $\quad \neg q \vee r$ $\quad p \wedge \neg r$

→ $\underset{(1)}{\neg p \vee q}$, $\underset{(2)}{p}$, $\underset{(3)}{q}$, $\underset{(4)}{\neg q \vee r}$, $\underset{(5)}{r}$, $\underset{(6)}{\neg r}$, $\underset{(7)}{\perp}$.

Como o conjunto de cláusulas $\{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$ é inconsistente, como se verifica em:

1.	$\neg p \vee q$	Hip
2.	$\neg q \vee r$	Hip
3.	p	Hip
4.	$\neg r$	Hip
5.	q	Res (1,3)
6.	r	Res (2,5)
7.	$\perp$	Res (4,6)

NOTA!

1. Converter as fórmulas na FNC
2. Negar φ e converter na FNC

A SINTAXE

Exemplos:

A Ana é docente   DOCENTE(ANA)

Todos os docentes são pessoas $\forall x\,(\mathrm{DIRETOR}(x) \to \mathrm{DOCENTE}(x))$

Todos têm um amigo $\forall x\, \exists y\ \mathrm{AMIGO}(y, x)$

$\exists$ existe

$\forall$ para todos

Fórmulas

$$\underbrace{\forall x \forall y \forall z \big(\overbrace{(x<y)}^{\text{fórmula}} \to \overbrace{(\underbrace{x+z}_{\text{termo}} < \underbrace{y+z}_{\text{termo}})}^{\text{fórmula}} \big)}_{\text{fórmula}}$$

fórmula

Variáveis livres e ligadas

Fórmula ligada · a var está no alcance do quantificador

$\times$ livre · oposto

Variável livre → ocorre pelo menos uma vez livre

Fórmula fechada → não tem variáveis livres

Exemplos

- $\forall x\,(GATO(x) \rightarrow GARRAS(x))$

  A VAR X OCORRE LIGADA

  FÓRMULA FECHADA

- $(\exists x \exists y\ x < y) \wedge (A < x)$

  Y OCORRE LIGADA, X OCORRE LIVRE E LIGADA

  FÓRMULA NÃO FECHADA

- $\forall x \exists y\,(x < y \wedge a < x)$

  X E Y OCORREM LIGADAS

  FÓRMULA FECHADA

A SEMÂNTICA (LÓGICA DE 1A ORDEM)

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida
$\exists y\, \forall y\, y < 4$	não válida
$\forall x\, ((x < 4) \rightarrow (1 = 0))$	não válida
$\forall x\, \exists y\, x < y$	válida
$\exists x\, \forall y\, x \leq y$	não válida

- fórmula válida → válida em cada interpretação
- fórmula consistente → " alguma interpretação
- " inconsistente → $\neg \varphi$ é válida
- ψ é consequência semântica $\varphi_1, \ldots \varphi_n \models \psi$

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

OBJETIVO: $\dfrac{\text{Todos os gatos têm garras} \qquad \text{Tom é um gato}}{\text{Tom tem garras}}$

→ LINGUAGEM DE 1ª ORDEM

$\forall x\,(\text{GATO}(x) \rightarrow \text{GARRAS}(x)),\ \text{GATO}(\text{TOM}) \models \text{GARRAS}(\text{TOM})$

→ PREPARAR PARA A DEDUÇÃO

(CONVERTER ANTECEDENTES NA FNC E NEGAR O CONSEQUENTE)

- $\forall x\,(\text{gato}(x) \rightarrow \text{GARRAS}(x)),\ \text{GATO}(\text{TOM}),\ \text{GARRAS}(\text{TOM})$

$$\downarrow$$

$\neg \text{GATO}(x) \vee \text{GARRAS}(x),\ \text{GATO}(\text{TOM}),\ \neg \text{GARRAS}(\text{TOM})$

→ DEDUZIMOS + (substituir Tom em x)

$\text{GATO}(\text{TOM}),\ \neg \text{GATO}(\text{TOM}) \vee \text{GARRAS}(\text{TOM}),\ \text{GARRAS}(\text{TOM}),\ \neg \text{GARRAS}(\text{TOM}),\ \perp$

FORMAS NORMAIS DE FÓRMULAS

- forma normal conjuntiva (disjuntiva)

$\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ ($\varphi = \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$)

$\big\downarrow$ onde φ_i $\big\downarrow$ onde φ_i

$l_1 \vee \dots \vee l_k$ ($l_1 \wedge \dots \wedge l_k$)

Forma normal prenex

(Quantificadores no início)

1º Mover as negações (¬) para o interior

$$\neg \forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg\varphi \qquad \neg \exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \neg\varphi$$

2º Mover os quantificadores para o exterior

- $(\forall x\, \varphi) \wedge (\forall x\, \psi) \equiv \forall x\, (\psi \wedge \varphi)$
- $(\exists x\, \varphi) \vee (\exists x\, \psi) \equiv \exists x\, (\varphi \vee \psi)$

(o mesmo acontece quando φ ou ψ não tem quantificador)

ex $\forall x\, P(x) \longrightarrow \exists x\, Q(x) \equiv \neg(\forall x\, P(x)) \vee (\exists x\, Q(x))$

$\equiv \exists x\, \neg P(x) \vee \exists x\, Q(x)$

$\equiv \exists x (\neg P(x) \vee Q(x))$

- $\forall x \forall y\, (\exists x\, (P(x,z) \wedge P(y,z))) \rightarrow \exists u\, Q(x,y,u))$

$\equiv \forall x \forall y\, (\neg(\exists x\, (P(x,z) \wedge P(y,z))) \vee (\exists u\, Q(x,y,u)))$

$\equiv \forall x \forall y\, (\forall z\, (\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z)) \vee (\exists u\, Q(x,y,u)))$

$\equiv \forall x \forall y \forall z \exists u\, (\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z) \vee Q(x,y,u))$

Forma Normal de Skolem
(fórmula fechada, sem vars livres)
(na forma normal conjuntiva)

No caso de $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$:

1. Escolher um novo símbolo de constante (c)
2. Substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \dots \varphi$ por c
3. Eliminar $\exists x_1$

No caso de $\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k Q_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$ $(k>1)$:

1. Escolher um novo símbolo de função (f) de k-1 args
2. Substituir todas as ocorrências livres de x_k em (...) por $f(x_1, \dots, x_{k-1})$
3. Eliminar $\exists x_k$

Ex Obter a FNS da fórmula

$$\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$$

→ Colocar a matriz na FNC

$$\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x,y) \vee R(x,y,z)) \wedge (Q(x,z) \vee R(x,y,z))).$$

→ Como $\exists y$ e $\exists z$ sucedem $\forall x$, substituir y e z por $f(x)$ e $g(x)$

$$\forall x ((\neg P(x,f(x)) \vee R(x,f(x),g(x))) \wedge (Q(x,g(x)) \vee R(x,f(x),g(x))))$$

UNIFICAÇÃO

Substituição: $\sigma : \{VARS\} \to \{TERMOS\}$

SE $\{v \mid \sigma(v) \neq v\} = \{v_1, \dots, v_n\}$ É finito, então

$$\{t_1/v_1, \dots t_n/v_n\}.$$

SENDO $t_i = \sigma(v_i)$

ex: $\sigma = \{f(z)/x,\ A/y\}$ CORRESPONDE A substituição

$\sigma : \{VARIÁVEIS\} \to \{TERMOS\}$

$$v \to \begin{cases} f(z) & \text{SE A VARIÁVEL É } x, \\ A & \text{SE A VARIÁVEL É } y, \\ v & \text{NOS OUTROS CASOS} \end{cases}$$

Substituição: $\hat{\sigma} : \{TERMOS\} \to \{TERMOS\}$

ex
- $\sigma = \{f(z)/x,\ A/y\}$

  $\hookrightarrow \hat{\sigma}(R(x,y)) = R(f(z), A)$

- $\sigma = \{f(z,y)/x,\ A/y\}$

  $\hookrightarrow \hat{\sigma}(R(x,y)) = R(f(z,y), A)$

O PRINCÍPIO DA BIJEÇÃO

- Se há função bijetiva $f : A \to B$, então $|A| = |B|$
  (mesmo nº elementos)

Ex:

$$P(X) = \{A : A \subseteq X\}$$

$$P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$|X| = n$

$|P(X)| = 2^n$

$|P(\{1,2,3\})| = 2^3$

$\mathbb{B} = \{0,1\}$

$|P(\{1,2,3\})| = |\mathbb{B}^3| = |\mathbb{B}|^3 = 2^3$

Inclusão - Exclusão fórmulas

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| - |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap C \cap D| + |A \cap B \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$$

números em 1000 Divisíveis por $n \to \left\lfloor \frac{1000}{n} \right\rfloor$

(arredondar por baixo)