MODELAÇÂO DE SISTEMAS FÍSICOS

1º TESTE – Parte Cálculo Analítico

22 de Março 2023, 16h30

Duração: 30 min

Cotação: I – 3 valores; II – 4 valores; III – 3 valores.

SOLUÇÃO

I - Foram medidos três comprimentos:

$$P = 1.2 \pm 0.1mm$$

$$Q = 9.6 \pm 0.5mm$$

$$R = 3.2 \pm 0.2mm$$

(a) Calcule a soma das três quantidades $S = P + Q + R$
$S = P+Q+R = 1.2+9.6+3.2mm = 14.0mm$, $\Delta S = \Delta P+\Delta Q+\Delta R = 0.1 + 0.5 + 0.2mm = 0.8mm$
$\Rightarrow S = 14.0 \pm 0.8mm$

(b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = Q - P$
$D = 9.6 - 1.2mm = 8.4mm$, $\Delta D = \Delta Q + \Delta P = 0.5 + 0.1mm = 0.6mm$
$\Rightarrow D = 8.4 \pm 0.6mm$

(c) Calcule o produto $F = R \times Q$.
$F = 3.2mm \times 9.6mm = 30.72mm^2$
$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{0.2}{3.2} + \frac{0.5}{9.6} = 0.11458333$
$\Rightarrow \Delta F = 30.72 \times 0.11458333 = 3.52mm^2$
Arredondar para um algarismo significativo no erro: $F = 31 \pm 4mm^2$

II - Considere um espaço a 3 dimensões. Neste espaço o vetor $\vec{a}$ está no plano OXY, tem comprimento 2m e faz um ângulo 135° com o eixo dos XX.

(a) Determine os 3 componentes do vetor $\vec{a}$.
$a_x = 2\cos(135^o) = -\sqrt{2}$; $a_y = 2\sin(135^o) = \sqrt{2}$; $a_z = 0$.

(b) Encontre o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com o vetor $\vec{b} = (0, 1, -1)$.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \cdot (0, 1, -1) = \sqrt{2}m^2$
$|\vec{a}| = 2m$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}m$
$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{2}/(2\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos(\frac{1}{2}) = 60^o = \pi/3$.

(c) Encontre um vetor unitário que seja perpendicular aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

O produto vetorial é perpendicular a ambos os vetores.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\hat{i} - \sqrt{2}\hat{j} - \sqrt{2}\hat{k}$$

Normalizar: $\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$, $|\vec{c}| = \sqrt{2+2+2} = \sqrt{6} \Rightarrow \hat{c} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{c} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\hat{i} - \frac{-1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{-1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

III - Um objeto de massa m experimenta uma força proporcional à sua velocidade, no sentido aposto:

$$\vec{F} = -mC\vec{v}$$

(a) Escreve expressões para os componentes de $\vec{F}$ em três dimensões, e daí para os componentes da aceleração.

$F_x = -mCv_x$; $F_y = -mCv_y$; $F_z = -mCv_z$

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{F}/m = -C\vec{v}$, então $a_x = F_x/m$ etc. $\Rightarrow a_x = -Cv_x$; $a_y = -Cv_y$; $a_z = -Cv_z$

(b) Mostre que a lei da velocidade é

$$\vec{v}(t) = (v_{0x}e^{-Ct}, v_{0y}e^{-Ct}, v_{0z}e^{-Ct})$$

onde $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ é a velocidade inicial.

Suponhe que $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-Ct}$

então $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = -C\vec{v}_0 e^{-Ct} = -C\vec{v} = \vec{F}/m$ logo esta lei de velocidade satisfaz a equação do movimento.

Formulário

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \qquad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

$$\frac{d}{dt}e^{-at} = -ae^{-at}$$

$$1rad = 57.29578graus$$

$$g = 9,80m/s^2$$