

MODELAÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS

2º TESTE – Parte Cálculo Analítico

10 de Maio 2023, 16h30

Duração: 30 min

Cotação: I – 4 valores; II – 3 valores; III – 3 valores.

SOLUÇÃO

I - Uma mola exerce uma força $F = -kx(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m . Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

(a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e ϕ são constantes.

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m}}A \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a_x(t) = -\frac{k}{m}A \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi) = \frac{k}{m}x(t),$$

$$\text{logo } F = ma_x(t) = -kx(t) \text{ CQD.}$$

[1.5 valores]

(b) Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m}}A \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)$$

[0.5 valor]

(c) Calcule A e ϕ , no caso em que a velocidade inicial é $+1$ m/s e a posição inicial a posição de equilíbrio do sistema.

$$v_x(0) = 1\text{m/s}, \quad x(0) = 0.$$

As leis do movimento dão, $x(0) = A \cos(\phi)$ e, $v_x(0) = -\sqrt{\frac{k}{m}}A \sin(\phi)$.
Assumindo $A \neq 0$, $\cos(\phi) = 0$, logo $\phi = \pi/2$.

Substituindo, $v_x(0) = -\sqrt{\frac{k}{m}}A \sin(\pi/2) = -\sqrt{\frac{k}{m}}A = 1\text{m/s}$ logo $A = -\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Alternativamente, $\phi = 3\pi/2 \Rightarrow v_x(0) = -\sqrt{\frac{k}{m}}A \sin(3\pi/2) = \sqrt{\frac{k}{m}}A = 1\text{m/s} \Rightarrow A = +\sqrt{\frac{m}{k}}$.

[2 valores]

II - O integral definido de uma função definida desde a até b

$$\int_a^b f(x)dx$$

pode ser calculado aproximadamente pela aproximação retangular, onde se faz:

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx f(x_i)\delta x$$

onde $x_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$, são n pontos de a até b ($x_i = a + i(b-a)/n$), e onde $\delta x = x_{i+1} - x_i$, com n um número inteiro.

Determine como varia o erro global do integral I em função do passo δx .

Expansão de Taylor de $f(x)$ à volta de x_i :

$$f(x) = f(x_i) + \frac{df}{dx}|_{x_i}(x - x_i) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}|_{x_i}(x - x_i)^2 + \mathcal{O}((x - x_i)^3)$$

Integral de x_i até x_{i+1} :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = f(x_i)\delta x + \frac{df}{dx}|_{x_i}\delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}|_{x_i}\delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

$$\text{Aproximação retangular: } \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx f(x_i)\delta x$$

Então o erro num passo:

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(x_i)\delta x \right| = \left| f(x_i)\delta x + \frac{df}{dx}|_{x_i}\delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) - f(x_i)\delta x \right| = \mathcal{O}(\delta x^2).$$

Em n passos, o erro é $Erro_{global} \propto n\delta x^2 = \frac{(b-a)}{\delta x}\delta x^2 = \mathcal{O}(\delta x)$.

[3 valores]

III - Considere um corpo de massa 0.25kg, sujeito a uma força $F = -3\alpha x^2 + kx$.

(a) Determine a energia potencial do corpo em função da posição x .

$$F = -\frac{d}{dx}E_p, \Rightarrow E_p = \int_0^x 3\alpha x^2 - kx dx = \alpha x^3 - \frac{1}{2}kx^2 \text{ (escolhendo } E_p = 0 \text{ em } x = 0).$$

[1 valor]

(b) Considere $k = 2\text{N/m}$ e $\alpha = 1\text{N/m}^2$. Se o corpo comece em $x = 0.5\text{m}$ com velocidade 0, calcule a energia mecânica do corpo.

Em $t = 0$, $E_p = 0.5^3 - \frac{1}{2}2 \times 0.5^2 J = 1/8 - 1/4 J = -1/8 J$ (relativo ao valor em $x = 0$) e $E_c = 0$ logo a energia mecanica total é $-1/8 J$ em todos os tempos.

[1 valor]

(c) Qual é a velocidade do corpo em $x = 0$?

Assume-se que a energia total é $-1/8 J = 1/8 J$. Em $x = 0$, $E_p = 0$, logo $E_c = 1/8 J = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2} \times 0.25 \times v_x^2 = v_x^2/8 J \Rightarrow v_x = \frac{1}{8} \times 8\text{m/s} = 1\text{m/s}$

[1 valor]

Formulário

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$f(x + \delta x) = f(x) + \left. \frac{df}{dx} \right|_x \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_x \delta x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_x \delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-at} = -ae^{-at}$$

$$1\text{rad} = 57.29578\text{graus}$$

$$g = 9,80\text{m/s}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_2|^2$$

$$\frac{dW}{dt} = P_o, \quad W = \int_{t_0}^{t_1} P_o dt$$

$$\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$