

MODELAÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS

EXAME – Parte Cálculo Analítico

13 de Junho 2024, 9h00

Duração: 1 hora

Cotação: I – 1,5 valores; II – 2 valores; III – 1,5 valores; IV – 2 valores; V – 3 valores.

I - Foram medidas três comprimentos:

$$A = 52.3 \pm 0.6 \text{ cm}$$

$$B = 9.4 \pm 0.2 \text{ cm}$$

$$C = 14.2 \pm 0.3 \text{ cm}$$

- (a) Calcule a soma das duas quantidades $S = A + B$.
- (b) Calcule a diferença entre as duas quantidades $D = C - B$.
- (c) Calcule o volume $V = A \times B \times C$.

II - Um carro está em movimento a 20m/s. O condutor aplica os travões, provocando uma aceleração de -5m/s^2 até o carro parar. Imediatamente comece a acelerar outra vez, com uma aceleração constante de 3 m/s^2 até atinge uma velocidade de 30m/s.

- (a) Escreva a lei de velocidade e a lei da posição do carro.
- (b) Qual a distância percorrida até o ponto em que parou?
- (c) Quanto tempo demora em total até atinge 30m/s?

III - Considere um espaço a 3 dimensões. Neste espaço o vetor \vec{v} está no plano OXZ, tem comprimento 3 m e faz um ângulo de 30° com o eixo dos XX.

- (a) Determine os 3 componentes do vetor \vec{v} .
- (b) Encontre o ângulo que o vetor \vec{v} faz com o vetor $\vec{a} = (0, 1, 1)$ m.
- (c) Encontre um vetor unitário que seja perpendicular a ambos os vetores \vec{v} e \vec{a} .

IV - Considere um corpo de massa 0.1kg, que se move numa superfície tal que a sua energia potencial é

$$E_p = 3x^2 - 2x^3.$$

- (a) Determine a força experimentada pela massa em função da posição x .
- (b) Encontre o ponto ou pontos em que a força é nula.
- (c) Se a posição inicial é $x_0 = 0$ m e a velocidade inicial é $v_0 = 0$ m/s, qual vai ser a velocidade em $x = 1$ m ?

V - Uma mola exerce uma força $F = -kx(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m . Considere $k = 2 \text{ N/m}$ e $m = 2 \text{ kg}$.

- Mostre que a lei do movimento $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, se o constante ω toma um determinado valor. Qual é este valor de ω ?
- Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?
- Calcule A e ϕ , no caso em que a velocidade inicial é -1 m/s e a posição inicial é 0 m .

Formulário

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}e^{-at} = -ae^{-at} \quad \frac{d}{dt}\cos(at) = -a\sin(at) \quad \frac{d}{dt}\sin(at) = a\cos(at)$$

$$1\text{rad} = 57.29578\text{graus} \quad g = 9,80\text{m/s}^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \quad F_x = -\frac{dE_p}{dx} \quad F_{elastica} = -k(x - x_{eq})$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_2|^2$$

$$\frac{dW}{dt} = P_o, \quad W = \int_{t_0}^{t_1} P_o dt \quad \int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad b_c = 2m\omega_0$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + \left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad v = f\lambda$$