

MODELAÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS

2º TESTE – Parte Cálculo Analítico

8 de Maio 2024, 16h00

Duração: 30 min

Cotação: I – 3 valores; II – 4 valores; III – 3 valores.

- I - O trenó do Pai Natal está estacionado num telhado com uma inclinação de 30 graus ao horizontal.



A massa do trenó é de 500 kg. As renas exercem uma força de 2000N para cima. O trenó também experimenta uma força de atrito de μN no sentido oposta ao movimento do trenó, onde N é a força normal perpendicular à superfície, e $\mu = 0.05$.

Determine a aceleração do trenó, considerando a força de gravidade, a força normal, a força de atrito e a força das renas. Indica a direção da aceleração.

Eixo x paralelo ao telhado, sentido positivo para cima.

$$\text{Peso } P_x = -Mg \sin 30^\circ = -2450\text{N}, P_y = -Mg \cos 30^\circ = -4243.52\text{N},$$

$$\text{Renas } R_x = 2000 \text{ N},$$

$$\text{Normal } N_y = Mg \cos 30^\circ = 4243.52\text{N},$$

Atrito $|A_x| = \mu N = \mu Mg \cos 30^\circ = 212.18\text{N}$, direção do atrito depende da orientação da aceleração resultante.

Força resultante se a aceleração for positiva:

$$F_x = P_x + R_x + A_x = -2450 + 2000 - 212.18\text{N} < 0 \text{ logo não pode ser.}$$

Se for negativa: $F_x = P_x + R_x + A_x = -2450 + 2000 + 212.18\text{N} = -237.82\text{N} < 0$ então a aceleração é para baixo.

$$A_x = F_x/M = -0.48\text{m/s}^2.$$

- II - Considere um corpo de massa 0.5kg, cuja energia potencial é dada por

$$E_p = 6x - 2x^3 + 4 \text{ (J)}$$

- Determine a força experimentada pela massa em função da posição x .
- Encontre o ponto ou pontos em que a força é nula.
- Se a posição inicial é $x_0 = 0$ m e a velocidade inicial é $v_0 = -4$ m/s, qual é a energia total?

(d) Calcule a velocidade em $x = -1$ m.

(a) $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 6x^2 - 6\text{N}$. (b) $x = 1\text{m}$ e $x = -1\text{m}$.

(c) $E = E_p(x = 0) + E_c(v = -2\text{m/s}) = 4 + 0.5 \times 0.5 \times (-4)^2 \text{J} = 8\text{J}$

(d) $E_c = E - E_p = 8 - (-6 - 2 + 4) = 8\text{ J}$ então a velocidade é $4\sqrt{2} = 5.66\text{m/s}$.

III - O integral de uma função $f(x)$ definida desde a até b

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

pode ser calculado aproximadamente pela aproximação retangular, onde se faz:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx f(x_i)\delta x$$

onde $x_i = a + i \times \delta x$, com $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, e onde $\delta x = (b - a)/n$, com n um número inteiro.

(a) Determine como varia o erro local do integral I_i em função do passo δx .

(b) Determine como varia o erro global do integral I em função do passo δx .

(a) $\mathcal{O}(\delta t^2)$ (b) $\mathcal{O}(\delta t)$ dedução semelhante à para o método trapezoidal, veja slides Cap. 4.

Formulário

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x_0} (x - x_0)^3 + \mathcal{O}((x - x_0)^4)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-at} = -ae^{-at}$$

$$1\text{rad} = 57.29578\text{graus}$$

$$g = 9,80\text{m/s}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_2|^2$$

$$\frac{dW}{dt} = P_o, \quad W = \int_{t_0}^{t_1} P_o dt$$

$$\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$