Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

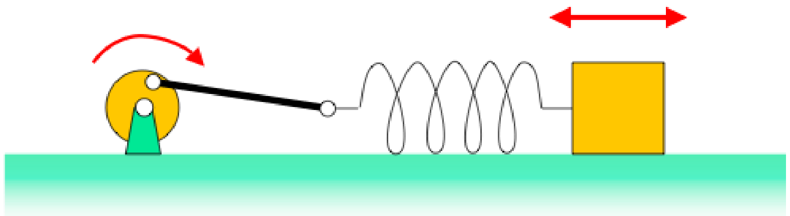
11ª aula Prática

Sumário:

Realização e resolução de problemas sobre Cap. 5

- Osciladores amortecidos e forçados
- Osciladores caóticos

Exercício 1: Oscilador harmónico forçado



Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador harmónico tem a energia potencial $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$ que exerce no corpo a força

$$F_x = -k\, x$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$.

Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, e $F_0 = 7.5$ N com $\omega_f = 0.5$ rad/s .

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.

c) Repita para valores de ω_f entre 0.2 e 2 rad/s. Faça um gráfico da amplitude em regime estacionário em função de ω_f . Qual a frequência angular ω_f que corresponde à maior amplitude?

Pergunta 1:
A força externa realiza trabalho? Como é que isso pode ser medido?

Exercício 2: Oscilador Não Harmónico Caótico, com Metodo de Runge-Kutta

Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. O oscilador tem a energia potencial $E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \alpha\ x^4$ e exerce no corpo a força

$$F_x = -kx - 4\,\alpha\,x^3.$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$.

Pergunta 2:
Este sistema será sempre caótico, quaisquer que sejam os parâmetros?

Considere $\alpha = 1$ N/m³, $k = 0.2$ N/m, $b = 0.01$ kg/s, $F_0 = 5$ N e $\omega_f = 0.6$ rad/s.

a) Use o método de Runge-Kutta da 4ª ordem para calcular numericamente a lei do movimento, de 0 até 50s, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial é x=1 m.

b) Experimente diferentes valores de δt. A partir de que valor tem confiança nos resultados?

c) Calcule novamente a lei do movimento, agora até t=100s, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial é x=1.0001 m. O que se observa?

d) Faça o gráfico das trajetórias no espaço de fase [$v_x(t)$ em função de $x(t)$]. O que se observa?

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$$

Método de Euler

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x\left(t, v_x(t)\right) \times \delta t$$

ou,

$$c_1 = a_x\left(t, v_x(t)\right)$$
$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + c_1 \times \delta t$$

Erro global $\mathcal{O}(\delta t)$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$c_1 = a_x\left(t, v_x(t)\right)$$
$$c_2 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1 \frac{\delta t}{2}\right)$$
$$c_3 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2 \frac{\delta t}{2}\right)$$
$$c_4 = a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3 \delta t)$$
$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

Erro global $\boldsymbol{\mathcal{O}(\delta t^4)}$

no e-elearning: function_rk4.py
(só calcula velocidade)

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

no e-learning existem duas funções:

function_rk4.py def rk4(t,vx,acelera,dt) só calcula velocidade

function_rk4_x_vx.py def rk4_x_vx(t,x,vx,acelera,dt) calcula velocidade e posição

Passa como argumentos os valores atuais de tempo, posição e velocidade, e a função retorna os valores de velocidade e posição um passo à frente.

acelera é o nome da função que calcule a aceleração. Deve ter apenas três argumentos t, x, vx.

```
def rk4_x_vx(t,x,vx,acelera,dt):
    """
    Integração numérica de equação diferencial de 2ª
    ordem respeitante ao movimento
    acelera=dvx/dt=Força(t,x,vx)/massa     com vx=dx/dt
    (acelera é uma função)
    input:  t = instante de tempo
       x(t) = posição
       vx(t) = velocidade
       dt = passo temporal
    output: x(t+dt), vx(t+dt)
    """
    ax1=acelera(t,x,vx)
    c1v=ax1*dt
    c1x=vx*dt
    ax2=acelera(t+dt/2.,x+c1x/2.,vx+c1v/2.)
    c2v=ax2*dt
    c2x=(vx+c1v/2.)*dt
    ax3=acelera(t+dt/2.,x+c2x/2.,vx+c2v/2.)
    c3v=ax3*dt
    c3x=(vx+c2v/2.)*dt
    ax4=acelera(t+dt,x+c3x,vx+c3v)
    c4v=ax4*dt
    c4x=(vx+c3v)*dt
    xp=x+(c1x+2.*c2x+2.*c3x+c4x)/6.
    vxp=vx+(c1v+2.*c2v+2.*c3v+c4v)/6.
    return xp,vxp
```