Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

2ª aula Prática

Sumário:

Resolução de problemas sobre o cap. 1

Bibliografia:

Anders Malthe-Sørenssen, *Elementary Mechanics Using Python*, 2016, Springer, cap. 2.

Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Dado um conjunto x, y de N medições, o **método dos mínimos quadráticos** oferece o ajuste linear que apresenta a menor diferença entre os valores medidos e os estimados por uma reta $y = m\,x + b$.

Se se considerar que os erros que afetam os valores de y são iguais, as expressões que o método fornece são:

$$m = \frac{N\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2\ \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

O coeficiente de determinação r^2 é tal que quando ~1 indica um ótimo ajuste, enquanto que ~ 0 indica que não há relação linear entre os dados. É dado por:

$$r^2 = \frac{\left(N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2}{\left[N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]\ \left[N \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right]}$$

As incertezas em m e b podem ser calculados do valor de r^2:

$$\Delta m = |m| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}} \quad \text{e} \quad \Delta b = \Delta m \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}$$

Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

$$m = \frac{N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$r^2 = \frac{\left(N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2}{\left[N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right] \left[N \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right]}$$

$$\Delta m = |m| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}} \quad \text{e} \quad \Delta b = \Delta m \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}$$

Exercicio 1. Escreva uma função em python que calcule as quantidades anteriores, dado os valores de x_i e y_i:

Como passo intermédio, calcule as somas:

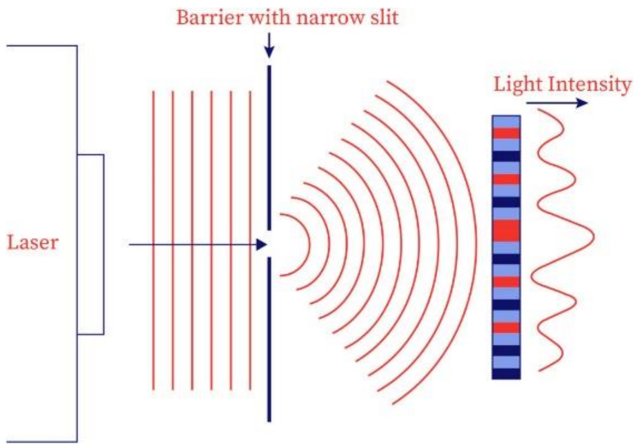
$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i, \qquad \sum_{i=1}^{N} y_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i^2, \qquad \sum_{i=1}^{N} y_i^2.$$

A função deve retornar as quantidades m, b, r^2, Δm e Δb

Pergunta 1:
Como podemos testar se a função está a funcionar corretmente?

Aplicação de regressão linear a um conjunto de dados

Numa experiência de difração de um feixe de luz por uma fenda única foram medidos 7 pares de valores (na tabela) da distância da fonte de luz ao alvo, L, e a distância entre máximos luminosos consecutivos (entre a mancha vermelha central e as outras manchas vermelhas) da figura de difração, X.



L (cm)	X (cm)
222.0	2.3
207.5	2.2
194.0	2.0
171.5	1.8
153.0	1.6
133.0	1.4
113.0	1.2
92.0	1.0

Exercicio 2. Escreva código em python que:

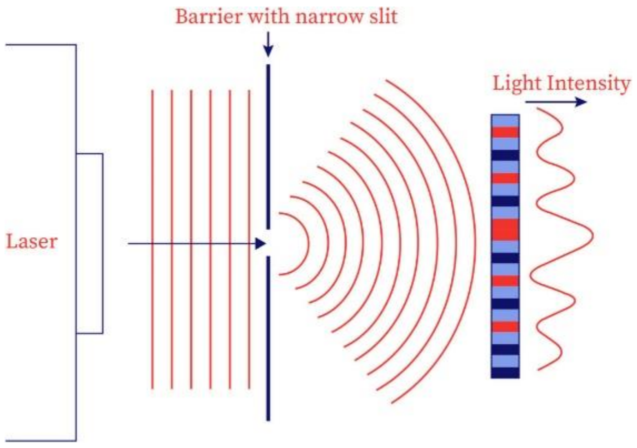
a) Representa os dados experimentais num gráfico.

b) Calcule as quantidades m, b, r^2, Δm e Δb para este conjunto de dados.

Compare com os valores

$$m = 0.01015505\,;\ \Delta m = 0.000162973$$
$$b = 0.05507544;\ \Delta b = 0.02713077$$
$$r^2 = 0.99845714$$

Aplicação de regressão linear a um conjunto de dados



De seguida:

c) Representa a reta $y = mx + b$ no gráfico.

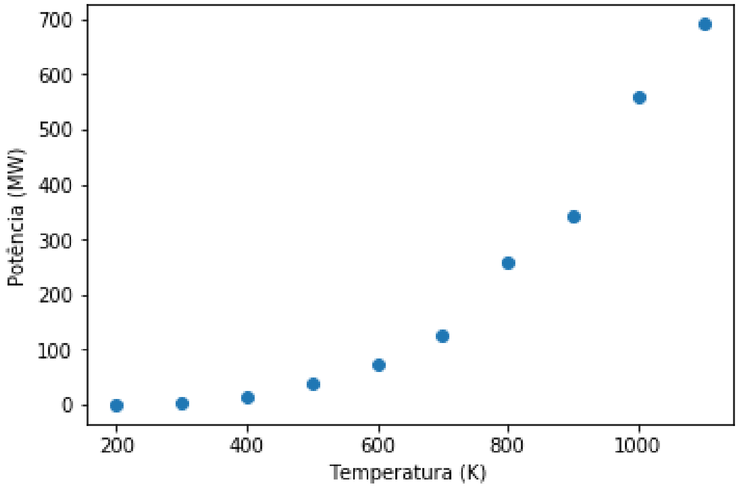
d) <u>Interpolação:</u> Encontre o valor de X, quando $L = 165.0$ cm. Use a reta determinada pela regressão linear.

e) Afaste da reta encontrada um dos valores medidos de y.

f) Calcule de novo os valores de m, b e o coeficiente de determinação r^2 e compare com o valor anterior. Faça um gráfico com os novos pontos experimentais e a nova reta.

Pergunta 2:
Sugire uma maneira de estimar o erro no valor de *X* encontrado en d).

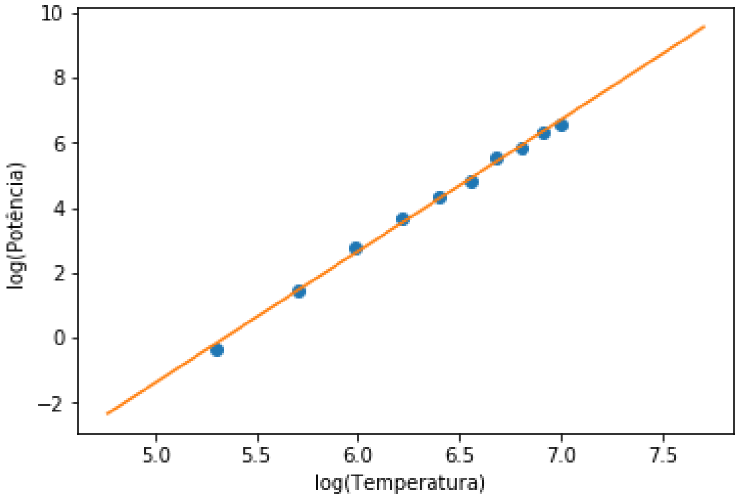
Leis de potência $y = cx^n$



logaritmo base b:

$$\log_b y = \log_b c + \underbrace{n}_{\text{declive}} \cdot \log_b x$$

Reta!



Propriedades dos logaritmos:

$\log_b e^x = x$

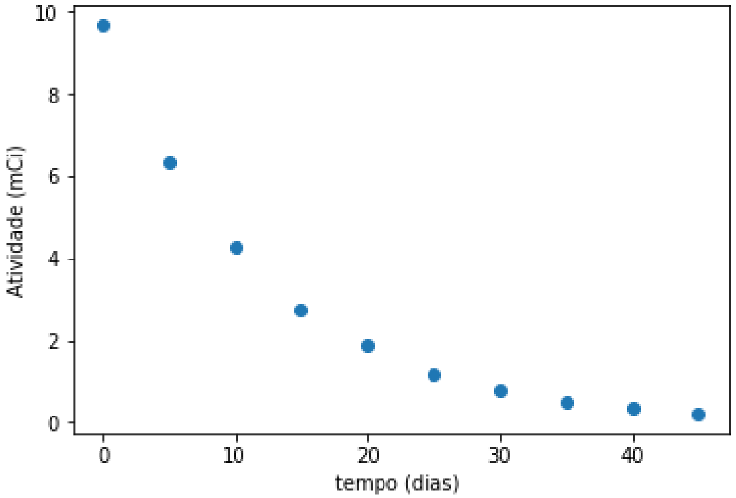
$\log_b x^y = \mathrm{y} \cdot \log_b x$

$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$

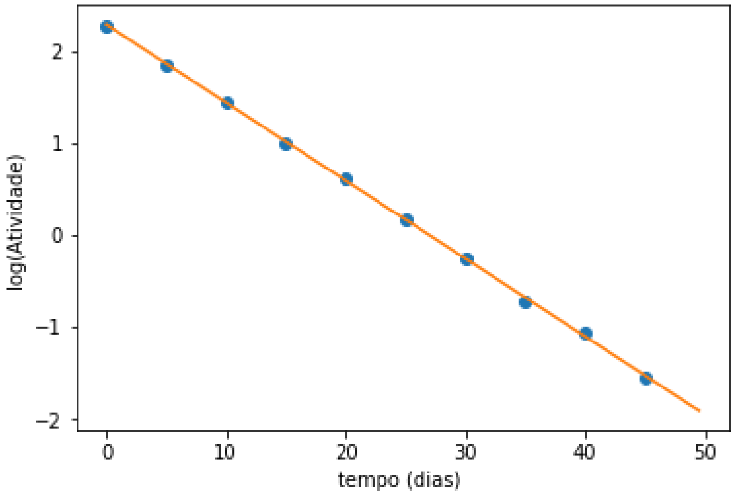
Lei exponencial $y = y_0 e^{\lambda t}$



logaritmo base b:

$$\log_b y = \log_b y_0 + \lambda t$$

declive



Propriedades dos logaritmos:

$$\log_b e^x = x$$

$$\log_b x^y = \mathrm{y} \cdot \log_b x$$

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

y e y_0 expressos nas mesmas unidades

Exercício 3. Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Foi medida a energia por segundo (potência) E emitida por um corpo negro (corpo que absorve toda a energia que incide nele) de área 100 cm^2 em função da temperatura absoluta, T, e registada na seguinte tabela

T (K)	200.	300.	400.	500.	600.	700.	800.	900.	1000.	1100.
E (J)	0.6950	4.363	15.53	38.74	75.08	125.2	257.9	344.1	557.4	690.7

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre a energia emitida e a temperatura é linear?

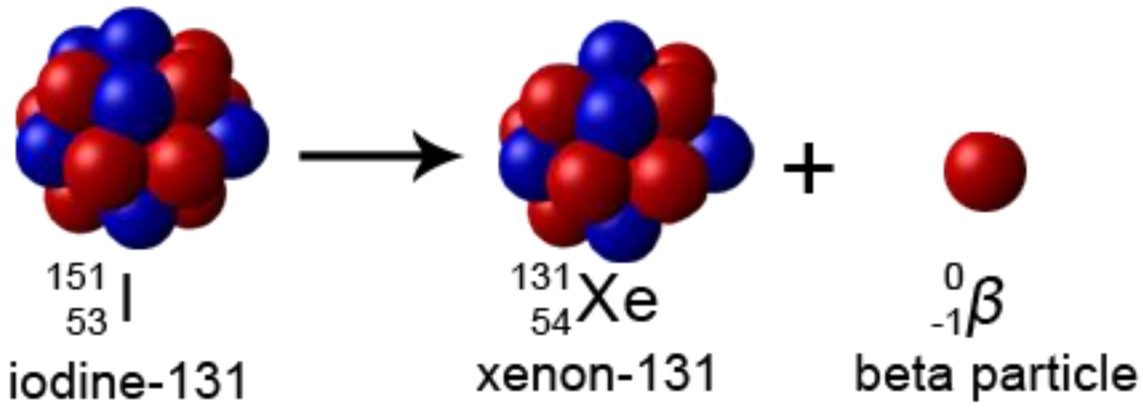
b) Apresente as medições num gráfico log-linear e um gráfico log-log.
   Pode usar as funções de matplotlib.pyplot plot(), semilogy() e loglog().

c) Qual a dependência entre as quantidade energia emitida e a temperatura: Linear, uma lei de potência ou uma lei exponencial?

d) Transforme os dados de modo a que a relação pareça linear e encontre a linha de melhor ajuste utilizando o método dos mínimos quadrados. Qual é o valor de r^2 ?

e) Escreva a função que representa a relação entre T e E encontrada.

Exercício 4. Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos



Pergunta 3:
Quanto tempo demora para a atividade da amostra diminuir por um fator de 2?
(Isto chama-se a semivida do isótopo)

Foi medida a atividade de uma amostra do isótopo radioativo ^{131}I tem de 5 em 5 dias.

Os valores medidos da atividade com o tempo são, em mCi:

9.676 , 6.355, 4.261, 2.729, 1.862, 1.184, 0.7680, 0.4883, 0.3461, 0.2119

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre a atividade e o tempo é linear?

b) Faça um gráfico do logaritmo da atividade com o tempo. Como depende a atividade com o tempo?

c) Encontre a função que relaciona a atividade com o tempo, incluindo os valores das constantes.

A unidade curie indica $3{,}7 \times 10^{10}$ desintegrações nucleares/s