Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

4ª aula Prática

Sumário:
Movimento a 1 dimensão. Método de Euler.

Método de Euler **velocidade e posição**

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} = v_x(t) \qquad \Rightarrow \qquad x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t) \times \delta t$$

Repetindo esta aproximação várias vezes, pode-se calcular a posição e velocidade em qualquer instante posterior ao instante inicial (integração numérica).

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} = a_x(t) \qquad \Rightarrow \qquad v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + \ a_x\,(t) \times \delta t$$

Podemos combinar o cálculo de posiçao e velocidade, fazendo duas integrações numéricas ao mesmo tempo:

Se se conhecer

$$x(0) = x_0 \qquad\qquad v_x(0) = v_{x0}$$

Obtêm-se

$$x(\delta t) \approx x_0 + v_x\,(0) \times \delta t \qquad\qquad v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x\,(0) \times \delta t$$

e de novo

$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + \ v_x(\delta t) \times \delta t \qquad\qquad v_x(\delta t + \delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x\,(\delta t) \times \delta t$$

e

$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + \ v_x(2\delta t) \times \delta t \qquad\qquad v_x(2\delta t + \delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x\,(2\delta t) \times \delta t$$

… …

Método de Euler **velocidade e posição**

matemática

Inicialmente

$x(0) = x_0$

$v_x(0) = v_{x0}$

Depois

$x(\delta t) \approx x_0 \quad + \; v_x\,(0) \times \delta t$

$v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x\,(0) \times \delta t$

...

$x((i+1)\delta t) \; \approx x(i\,\delta t) + \; v_x(i\,\delta t) \times \delta t$

$v_x\,((i+1)\delta t) \; \approx v_x(i\,\delta t) + \; a_x(i\,\delta t) \times \delta t$

...

$x(N\delta t) \approx x((N-1)\delta t) + \; v_x((N-1)\delta t) \times \delta t$

$v_x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + a_x\,((N-1)\delta t) \times \delta t$

python

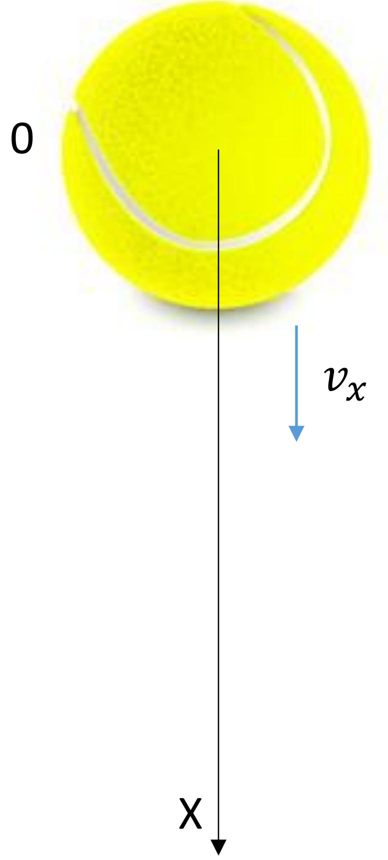
```
x[0] = x0
vx[0] = vx0

for i in range(N):
    aceler=g          # queda livre
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    vx[i+1]=vx[i]+aceler*dt

    t[i+1]=t[i]+dt
```

Exercício 1

Uma bola de ténis é largada de uma altura elevada. Considere a queda livre, sem resistência do ar. Considere que a aceleração vertical é $g = 9.80\ \mathrm{m/s}$



a) Construa um programa que determine a posição do objeto, usando o método de Euler, no interval de tempo $[0, 4\mathrm{s}]$.

b) Qual a velocidade no instante 3s?

c) Repita as alíneas anteriores, com um passo de tempo 10 vezes menor.

d) Compare o resultado obtido em b) e c) com o resultado exato. Que conclui?

e) Qual a posição em 3s, se o objeto partiu da posição 0 m? (Usa o passo de tempo da alínea b).)

f) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.

g) Compare o resultado obtido em e) e f) com o resultado exato. Que conclui?

h) Calcule novamente a posição no instante 2s, para vários valores do. Faça o gráfico do desvio do valor aproximado com o valor exato em função do passo. Como varia o erro com o passo?

Pergunta 1:

Como variam os erros na posição e de velocidade com o passo de tempo? Esses padrões repetiam para outras funções de aceleração? Justifique.

Resistência do ar

Vamos **supor que a aceleração devido resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade**

$a_y^{(res)} = -D\ v_y|v_y|$ sempre oposta ao sentido do movimento, e

Assim

$a_y(t) = g - D\ v_y|v_y|$ em que o parâmetro D é positivo e a determinar

O termo da aceleração da resistência do ar se opõe ao movimento, e, **a partir de algum instante esse termo anula a parte gravítica**.

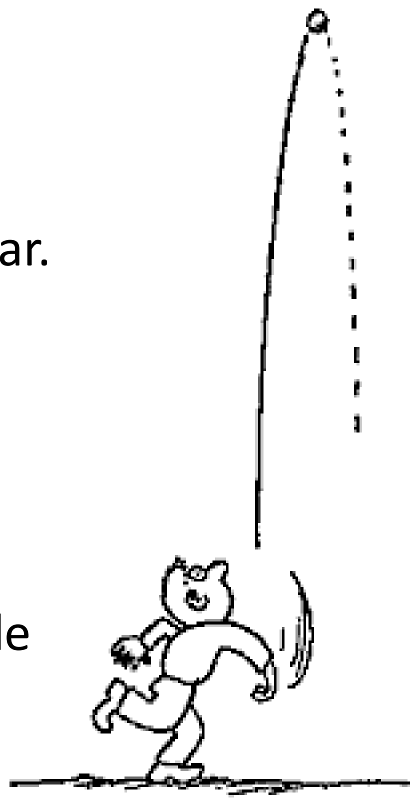
Se a aceleração for nula, temos movimento uniforme e a velocidade é constante $|v_y| = v_T$
e chamada de velocidade terminal (também chamada de velocidade limite)

$$0 = g - Dv_T|v_T|$$

$$\Longrightarrow\ D = \frac{g}{v_T|v_T|} = \frac{g}{v_T^2}$$

Se medimos a velocidade limite saberemos o valor de D.

Exercício 2



Uma bola é lançada verticalmente para cima com a velocidade 10 m/s.

a) Encontre analiticamente a lei do movimento $y = y(t)$, se não considerar a resistência do ar.

b) Qual a altura máxima e o instante em que ocorre, no caso da alínea a)?

c) Em que instante volta a passar pela posição inicial, no caso da alínea a)?

d) Resolva a alínea a), considerando a resistência do ar, usando o método de Euler. A velocidade terminal da bola no ar é de 100 km/h.

e) Repita alíneas b) e c) nas condições de alínea d). Deve encontrar uma maneira numérica de estimar os instantes da altura máxima e do retorno ao posição inicial.

Pergunta 2:
Como é que os resultados são afectados pela inclusão da resistência do ar?
Como seriam diferentes se a velocidade terminal fosse muito maior?