Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

Capítulo 2 Movimento a uma dimensão.

- Observação de movimento linear
- Definição de velocidade e aceleração instantânea.
- Modelos de movimento 1D
- Solução analítico
- Solução numérico

Bibliografia:

Serway, cap. 2
Sørenssen, cap. 4
Villate, cap. 1

Movimento a 1 dimensão

Movimento sem mudança de direção

Movimento em que o caminho pode ser parametrizado com um escalar

Movimento num eixo independente

Como podemos descrever o movimento?

Posição ←→ velocidade ←→ aceleração

Observação de movimento em 1 dimensão

Vídeo de record mundial de Usain Bolt, Berlim 2009
https://youtu.be/3nbjhpcZ9_g

Observação de movimento em 1 dimensão

Em cada instante a posição do Usain Bolt é diferente. **A posição é uma quantidade instantânea**.

Indica-se a posição ao longo da pista por $x(t)$ e é referenciada no eixo OX.

Neste caso é conveniente colocar a origem do eixo no ponto da partida dos atletas.

Origem do eixo

x

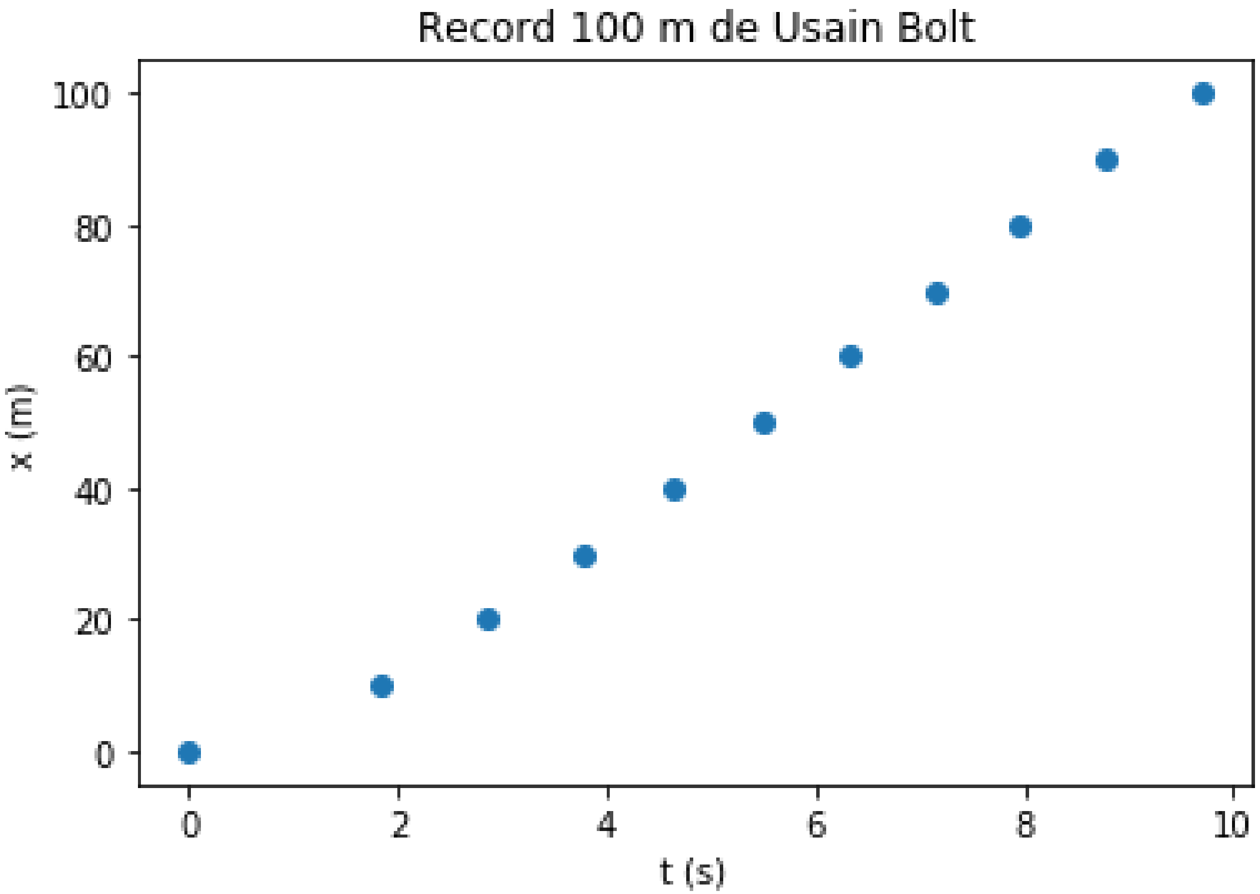
Pelas mesmas razões **a velocidade também é uma quantidade instantânea.**

Indica-se por $v_x(t)$. O índice x é para indicar que é referenciado no eixo OX.

A posição $x(t)$ e a velocidade $v_x(t)$ podem ser positivos ou negativos!

O desempenho de Bolt nos 100m foi medido.

```
# Tempos de Usain Bolt a correr os 100 m
# ficheiro dataUsainBolt.txt
# 1º conjunto: final olimpica em Pequim, 2008
# 2º conjunto: record mundial, Berlim 2009
# Medalha de ouro e record mundial
# x (m)    t1 (s)    t2 (s)
0          0         0
10         1.83      1.89
20         2.87      2.88
30         3.78      3.78
40         4.65      4.64
50         5.50      5.47
60         6.32      6.29
70         7.14      7.10
80         7.96      7.92
90         8.79      8.75
100        9.69      9.58
```



Pode-se analisar como foi o seu movimento.

A lei do movimento $x = x(t)$

Que se pode afirmar sobre a velocidade de Usain Bolt?

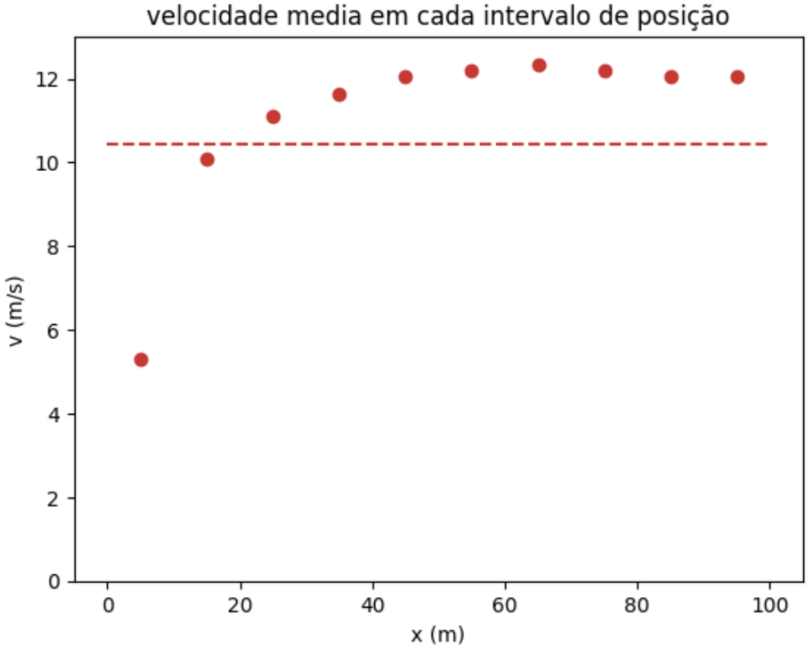
Velocidade média:

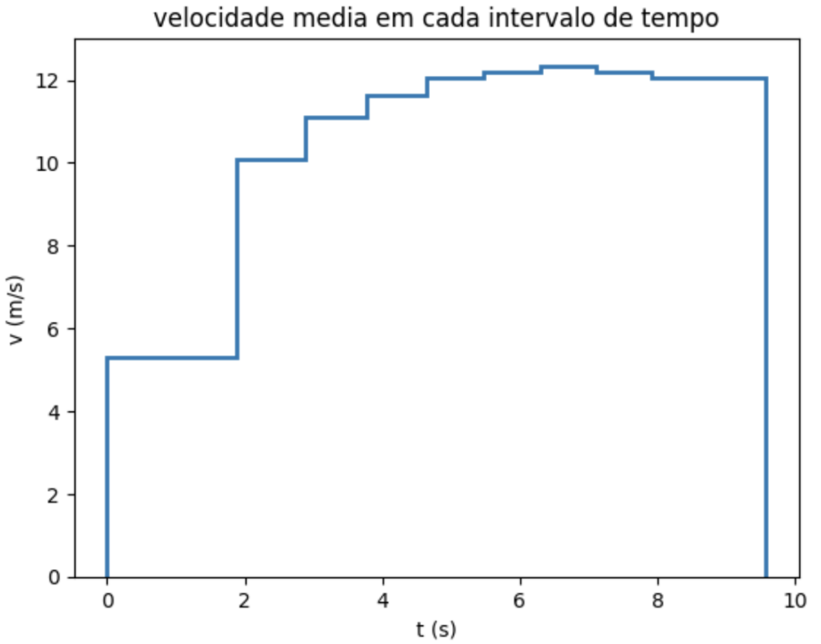
$$\overline{v_x} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}} = \frac{100\text{ m}}{9.58\text{ s}} = 10.4\text{ m/s} = 37.6\text{ Km/h}$$

Velocidade média em cada percurso de 10 m? $\overline{v_x} = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}$

x_i	x_{i+1}	$\overline{v_x}$
0.0	10.0	5.3
10.0	20.0	10.1
20.0	30.0	11.1
30.0	40.0	11.6
40.0	50.0	12.0
50.0	60.0	12.2
60.0	70.0	12.3
70.0	80.0	12.2
80.0	90.0	12.0
90.0	100.0	12.0

Unidades SI





A **velocidade** de Usain Bolt evolui no tempo.
Começou com velocidade nula, mas rapidamente aumentou a sua velocidade.

t_i	x_i	x_{i+1}	$\overline{v_x}$
0.0	0.0	10.0	5.3
1.89	10.0	20.0	10.1
2.88	20.0	30.0	11.1
3.78	30.0	40.0	11.6
4.64	40.0	50.0	12.0
5.47	50.0	60.0	12.2
6.29	60.0	70.0	12.3
7.10	70.0	80.0	12.2
7.92	80.0	90.0	12.0
8.75	90.0	100.0	12.0
9.58	100.0		

Aceleração também varia ao longo do percurso

- Nos instantes iniciais a velocidade altera-se muito (de 0 até ~11 m/s)
- Nos instantes médios até ao final a velocidade é ~12 m/s.

Aceleração média nos primeiros 50m:

$$\overline{a_x} = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{tempo}} = \frac{12.0 - 0.0}{5.47 - 0.0} = 2.19\ m/s^2$$

Nos segundos 50m: $\overline{a_x} = 0.0$

Podemos calcular aceleração nos intervais?

$$\overline{a_x} = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}$$ quais tempos correspondem a cada velocidade?

Para a velocidade tanto como a aceleração, temos muitos poucos valores, os tempos a que correspondem não estão bem definidos.

Idealmente queremos muitos mais intervalos, para intervalos de tempo muito mais pequenos:

No limite quando $\delta t \to 0$ $\quad v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad\quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea):

$$x(t)$$

Velocidade instantânea:

$$\downarrow$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\downarrow$$

Aceleração instantânea:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Se souber como a posição varia no tempo, $x(t)$, saberei a velocidade e a aceleração.

Exemplo: Se $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

$$\Rightarrow v_x\,(t) = gt \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = gt \\ a_x(t) = g \end{cases}$$

E se souber a aceleração instantânea?

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

E se souber a aceleração instantânea $a_x(t)$?

Cálculo integral: $a_x(t)$

$\downarrow$

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt$$

$\downarrow$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt$$

Modelo de movimento sabendo a aceleração instantânea

Muitas vezes o modelo do movimento é definido em termos de a_x:

i. **aceleração constante**
   Exemplo: $a_x(t) = g$ aceleração devido a gravidade
   $a_x(t) = 0$ é um caso particular

ii. **aceleração depende do tempo**
   $a_x(t)$ é uma função conhecida
   Ex.: aceleração de um carro

iii. **acelaração depende da velocidade**
   $a_x(v)$ é conhecida (temos que encontrar $a_x(t)$)
   Ex.: queda com resistência do ar

iv. **acelaração depende da posição**
   $a_x(x)$ é conhecida
   Ex.: uma massa afixada a uma mola (mais em capítulos 4 e 5)

Aceleração constante

$a_x(t) = a$ aceleração constante [e conhece-se condições iniciais $v_x(t_0)$ e $x(t_0)$] e usando cálculo integral:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a\, dt = v_x(t_0) + a\,(t - t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2) - at_0(t - t_0)$$

<u>Se $t_0 = 0$:</u>

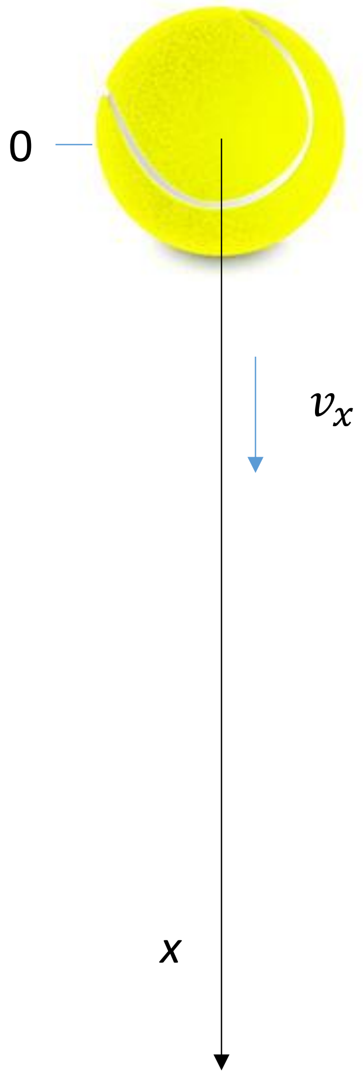
$$v_x(t) - v_x(0) = g\,t \qquad \Longrightarrow \boldsymbol{v_x(t) = v_x(0) + a\,t}$$ velocidade linear em tempo

$$x(t) - x(0) = v_x(0)\,t + \frac{1}{2}gt^{\,2} \qquad \Longrightarrow \boldsymbol{x(t) = x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2}at^{\,2}}$$

Eliminando *t* entre estes dois temos também: $\boldsymbol{v_x(t)^2 = v_x(0)^2 + 2a[x(t) - x(0)]}$

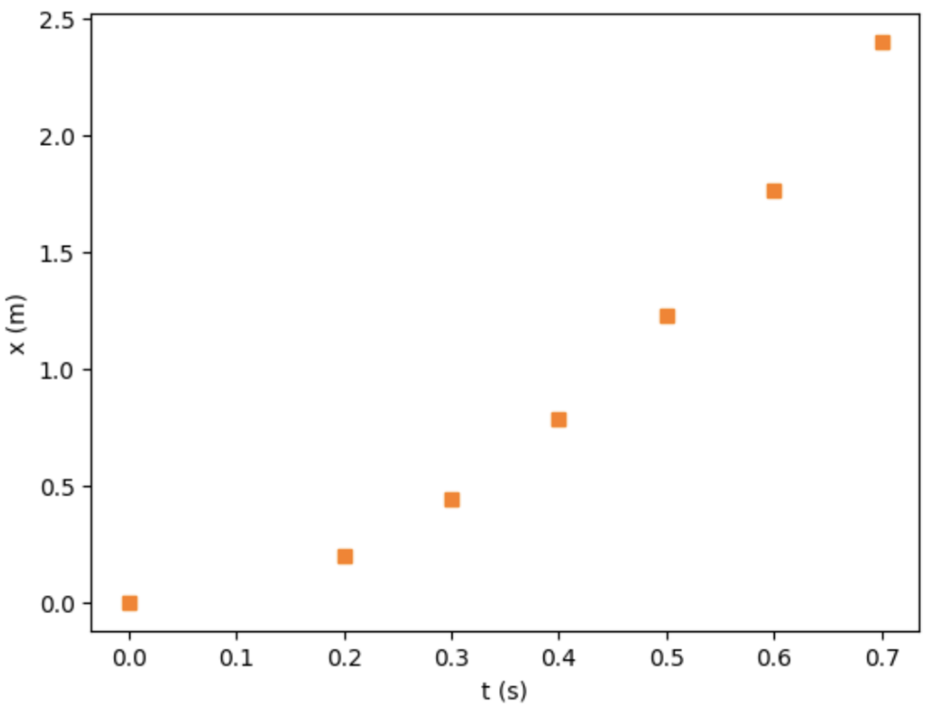
Aceleração Constante

Ex: Queda de uma bola de ténis.

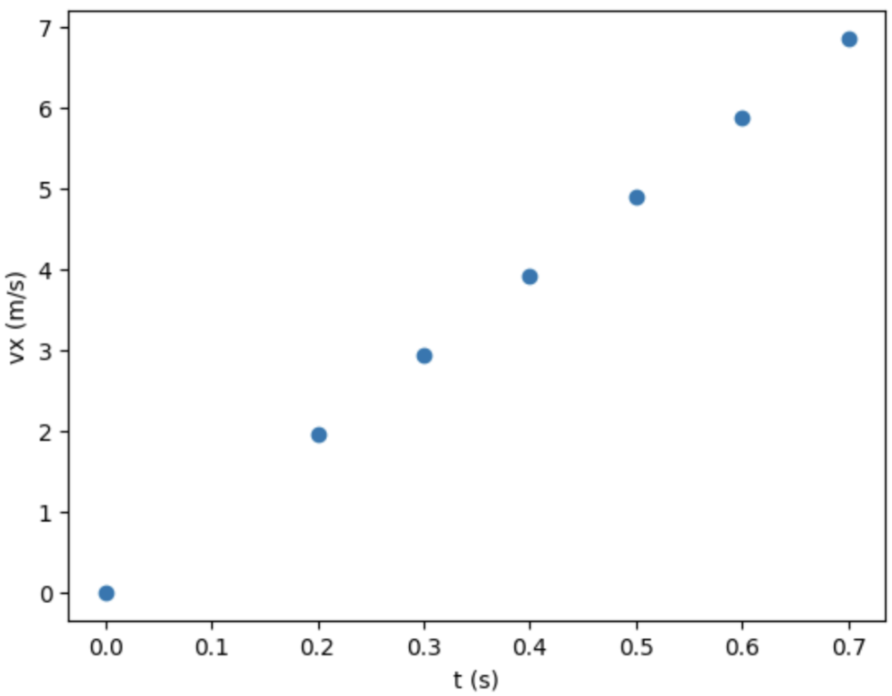


Os valores de posição e de velocidade registados de uma experiência estão no gráfico:
quando é largada, $v_x(t_0) = 0$
Também se faz $t_0 = 0$

Posição



Velocidade

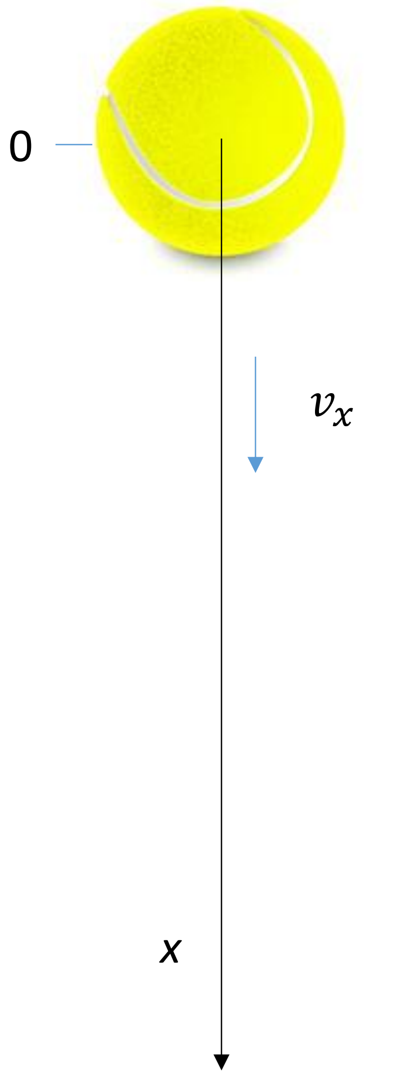


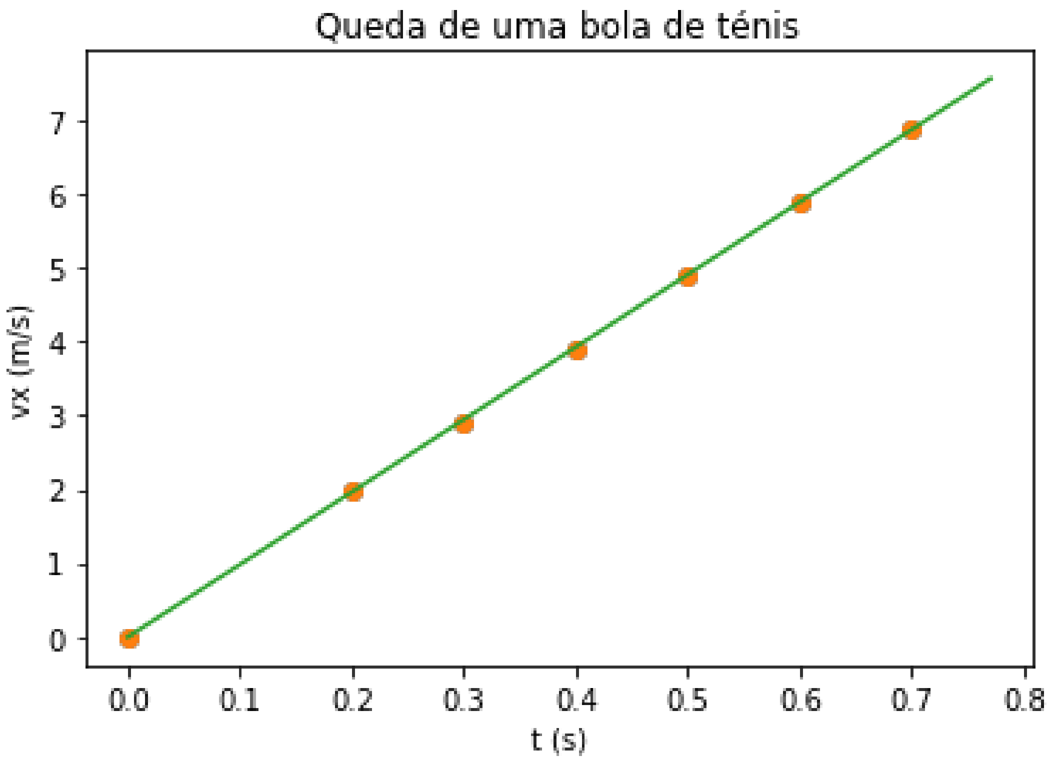
A dependência da velocidade no tempo parece linear.

Ex: Queda de uma bola de ténis.

Hipótese: a velocidade é linear no tempo $\Rightarrow$ aceleração é constante (gravidade)

Efeito da resistência do ar é muito pequeno e estamos a considerar velocidade pequenas.





Regressão linear:

$m = 9.84 \pm 0.06$ m/s²

$b = -0.01 \pm 0.03$ m/s $\qquad \boldsymbol{v_x(t) = b + m\,t}$

$r^2 = 0.9999$

Se compararmos com as equações de aceleração constante:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x(0) + g\,t \\ x(t) = x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2} g t^{\,2} \end{cases}$$

tem-se $\qquad g = m = 9.84 \pm 0.06$ m/s²

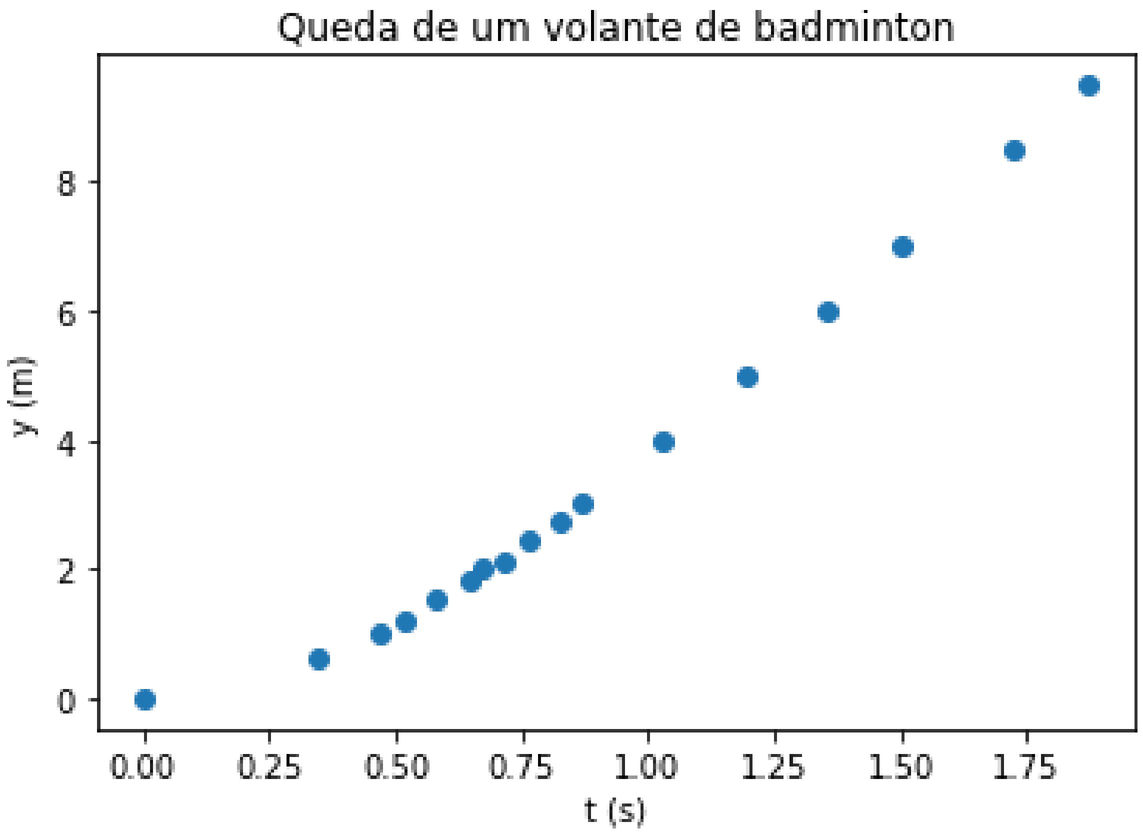
$v_x(0) = b = -0.01 \pm 0.03$ m/s

Bom modelo!

Aceleração não constante

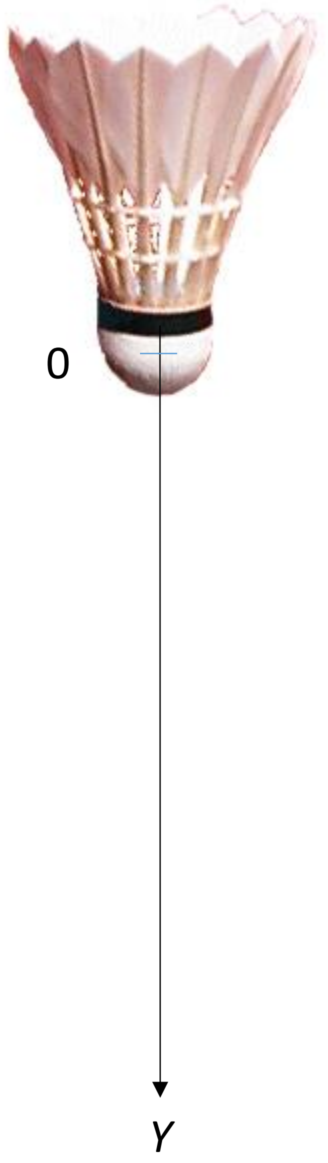
Ex: Queda de um volante de badmington, em que a ***resistência do ar é muito elevada*** e o movimento pode apresentar velocidade elevadas. Caso em que o volante é largado.

Os valores de posição registados de uma experiência estão no gráfico

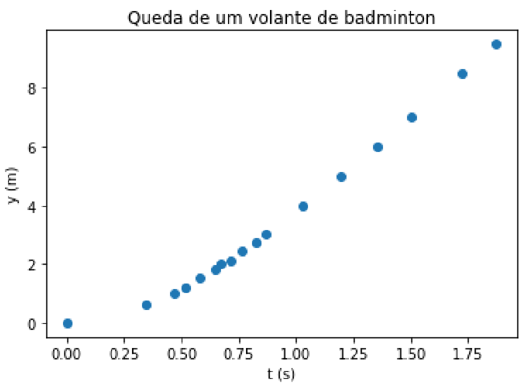


- Para instantes $0 < t < 1.00$ s o movimento não parece uniforme.

- Para $t > 1.25$ s o movimento parece ser uniforme (linear).



Ex: Queda de um volante de badmington



Modelo: além de gravidade, **modelamos a resistência do ar**

- Para velocidades pequenas, o efeito tempo deve ser muito pequena
- Para velocidades maiores, deve depender da velocidade e retardar o movimento.

  Ou seja deve originar uma aceleração negativa.

Vamos **supor que é proporcional ao quadrado da velocidade**

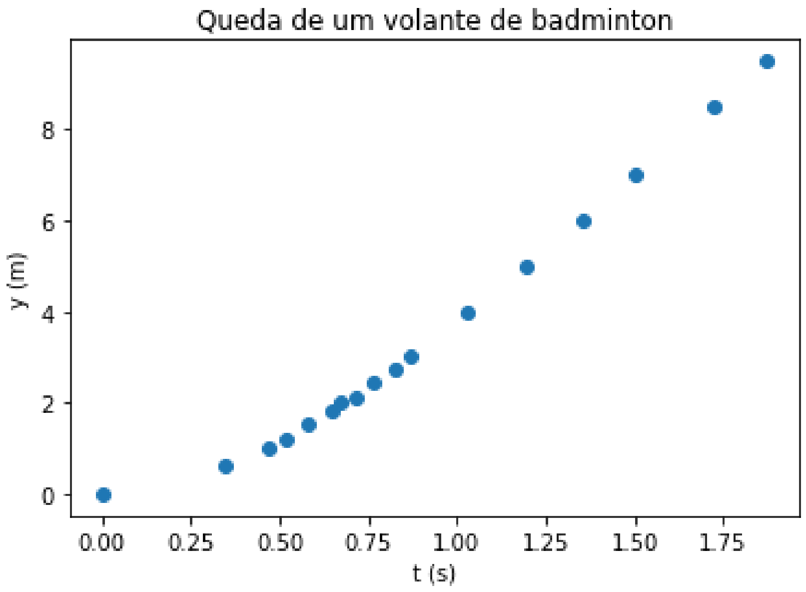
$$a_y^{(res)} = -D\, v_y |v_y|$$ sempre oposta ao sentido do movimento

Então a aceleração do volante será:

$$a_y(t) = g - D\, v_y |v_y|$$

em que o parâmetro D é positivo.

Ex: Queda de um volante de badmington



Modelo

$$a_y(t) = g - D\, v_y |v_y|$$

Como determinar o parâmetro D ?

O termo da aceleração da resistência do ar cresce com a velocidade, e **a partir de algum instante esse termo anula a parte gravítica**.

A partir deste momento, a velocidade é constante $|v_y| = v_T$ velocidade terminal

Concorda com os dados: a velocidade é constante para tempos maiores.

$$0 = g - D v_T |v_T|$$

$$\Longrightarrow \quad D = \frac{g}{v_T |v_T|} = \frac{g}{v_T^2}$$

Se medimos a velocidade limite saberemos o valor de D.

Ex: Queda de um volante de badmington

Tempos de queda livre de um volante de badmington no ar.
altura inicial 9.50 m
Peastrel et al, American Journal of Physics, 48, 511-513 (1980)

# y(m)	t (s)
0	0
0.61	0.347
1.00	0.470
1.22	0.519
1.52	0.582
1.83	0.650
2.00	0.674
2.13	0.717
2.44	0.766
2.74	0.823
3.00	0.870
4.00	1.031
5.00	1.193
6.00	1.354
7.00	1.501
8.50	1.726
9.50	1.873

$$v_T = \frac{9.50-8.50}{1.873-1.726} = 6.8\, m/s$$

$$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2} v_y |v_y|$$

estes dados estão no e-learning, ficheiro: data_cap2_queda_volante.txt

Ex: Queda de um volante de badmington

Modelo:

$v_y(0) = 0$

$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2} v_y |v_y|$ $\quad g = 9.8\, m/s^2$ $\quad v_T = 6.80$ m/s.

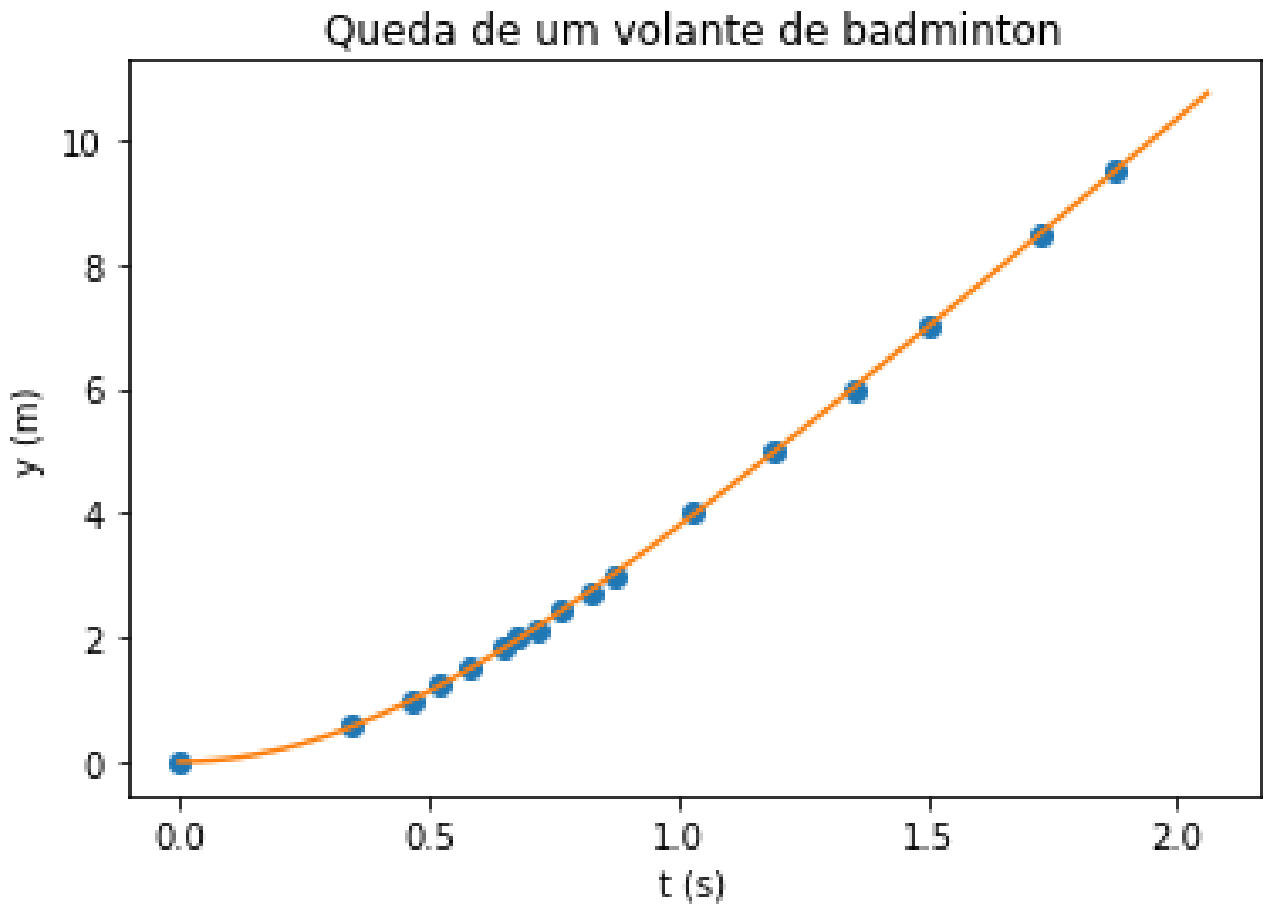
Por integração analítica:

$$\Rightarrow y(t) = \frac{v_T^2}{g} \ln\left[\cosh\left(\frac{gt}{v_T}\right)\right]$$

(Python também tem um pacote para cálculo simbólico).

Acordo muito bom entre a lei do movimento e os dados.

Bom modelo!



Se fizer a aceleração devida à resistência do ar **proporcional à velocidade não se obtêm acordo**

O que podemos fazer quando não há (ou não sabemos) uma solução analítica?

Quando a aceleração é constante, e em alguns casos mais complexos, temos solução analítica

Quando a aceleração depende de tempo, de velocidade ou de posição, em muitos casos não temos uma solução analítica.

Temos que recorrer a uma **solução numérica:** efetivamente, simulação

o primeiro método que vamos aprender chama-se o **Método de Euler**

Método de Euler

Leonhard Euler 1707-1783

Definição da derivada de uma função

$$v_x(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t}$$

aproximar com

$$v_x(t) \approx \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t}$$

com δt pequeno (mas não zero)

Multiplicar por δt

$$\Rightarrow \qquad x(t+\delta t) - x(t) \approx v_x(t) \times \delta t$$

$$\Rightarrow \qquad x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

Se soubermos no mesmo instante, t, a **posição** $x(t)$ e a **velocidade** $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ (a sua derivada)

Podemos calcular (aproximadamente) o valor da posição num instante posterior, $x(t+\delta t)$.

Método de Euler

Leonhard Euler 1707-1783

Temos

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t) \times \delta t$$

Comecando com $x(0) = x_0$

Obtêm-se $x(\delta t) = x_0 + v_x(0)\ \times\ \delta t$

e de novo $x(\delta t + \delta t) = x(\delta t) + v_x(\delta t)\ \times \delta t$

e $x(2\delta t + \delta t) = x(2\delta t) + v_x(2\delta t)\ \times \delta t$ etc.

Pode-se calcular a posição em qualquer instante posterior ao instante inicial.

O método de Euler é um **método numérico de integração:** sabendo $v_x(t)$ pode-se calcular $x(t)$

Compare $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt$

Tem-se de escolher o passo temporal δt de modo a conseguir a convergência da solução

Implementação do Método de Euler

Implementar em python o método de Euler para resolver a equação diferencial $\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$,

Queremos calcular valores de $x(t)$ de δt em δt começando em $t_0 = 0$ até $t = t_f$

Parâmetros:

	δt	passo temporal
	$t_0 = 0$	instante inicial
	t_f	instante final
	$x_0 = 0$	posição inicial
	$v_x(0) = 0$	velocidade inicial

e sabemos calcular $v_x(t)$ em cada instante

Relação entre passo de tempo e número de passos

Com N passos de δt, o tempo decorrido é $t_f - t_0 = N\,\delta t$

Ou seja $N = \frac{t_f - t_0}{\delta t}$ número de passos

ou $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$ passo temporal

Implementação do Método de Euler

Parâmetros:

δt	passo temporal
$t_0 = 0$	instante inicial
t_f	instante final
$x_0 = 0$	posição inicial
$v_x(0) = 0$	velocidade inicial

e sabemos calcular $v_x(t)$ em cada instante

$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t}$ número de passos

METODO DE EULER:

$$x(0) = x_0$$
$$x(\delta t) \approx x(0) + v_x(0) \times \delta t$$
$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x(\delta t) \times \delta t$$
…
$$x(i\delta t) \approx x\big((i-1)\delta t\big) + v_x((i-1)\delta t) \times \delta t$$
…
$$x(N\delta t) \approx x\big((N-1)\delta t\big) + v_x((N-1)\delta t) \times \delta t$$

Implementação do Método de Euler

Variáveis

Array de tempos t=numpy.linspace(t0,tf,N+1)

Array de posições x=numpy.zeros(N+1) ou numpy.empty(N+1)

(Array de velocidades)

$x(0) = x_0$ → x[0] corresponde ao $\mathrm{t[0]} = 0$

$x(\delta t) \approx x_0 + v_x\,(0) \times \delta t$ → x[1] corresponde ao $\mathrm{t[1]} = \delta t$

…

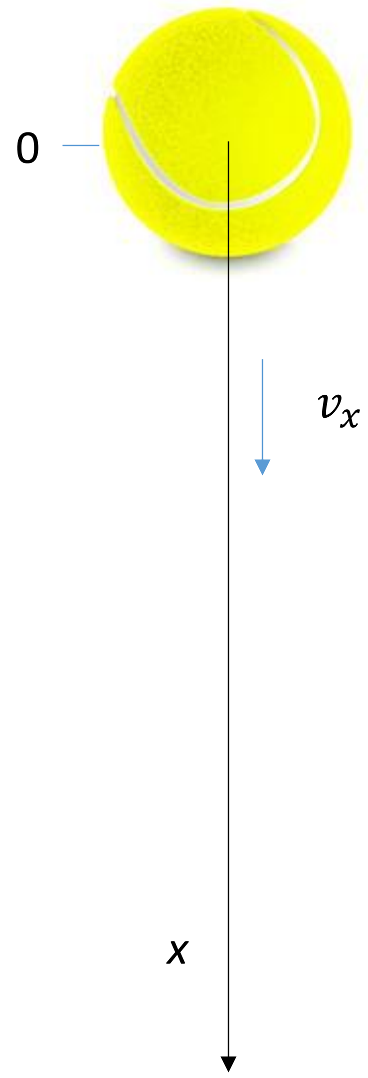
$x(i\delta t) \approx x\big((i-1)\delta t\big) + v_x((i-1)\delta t) \times \delta t$ → x[i] corresponde ao $\mathrm{t[i]} = i\delta t$

…

$x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + v_x\,((N-1)\delta t) \times \delta t$ → x[N] corresponde ao $\mathrm{t[N]} = N\delta t = t_f$

indexação: de 0 a N, num total de N+1 elementos

Exemplo do Método de Euler



Queda livre de uma bola te ténis, sem resistência do ar

$$t_0 = 0$$
$$x(0) = 0$$
$$v_x(0) = 0$$

Aceleração é constante:

$$a_x(t) = +g$$

Já resolvemos este problema por integração analítica.

Agora vamos encontrar a velocidade e a posição pelo **Método de Euler**, e podemos comparar com o resultado exato.

Implementação do Método de Euler

Estrutura

1. Initializar
- Constantes
- Condições iniciais
- Numero de passos
- Variáveis

2. Algoritmo
- Iteração do método de Euler

3. Resultados
- Apresentar resultados
- Gráficos etc.

```
# Integração numérica de dx/dt = vx, pelo Método de Euler
# queda livre com vx = g*t
import numpy as np

#constantes
dt=0.01                                        # passo de tempo
tf=4.0
t0=0
x0=0
v0x=0
g=9.80
# numero de passos
n=np.int((tf-t0)/dt+0.1)       # +0.1 para não arredondar para baixo

# criar arrays
t=np.zeros(n+1)                                # n+1 elementos; último índice n
x=np.zeros(n+1)
vx=np.zeros(n+1)

#valores iniciais nos arrays
vx[0]=v0x
t[0]=t0
x[0]=x0

# Método de Euler (n+1 elementos)
for i in range(n):
   vx[i]=g*t[i]
   x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt         # último x[n]= x[n-1]+vx[n-1]*dt
   t[i+1]=t[i]+dt

# Apresentar resultados
...
```

Exemplo do Método de Euler

Escolha do passo temporal δt

Para um tempo final t_f (t_0=instante inicial)

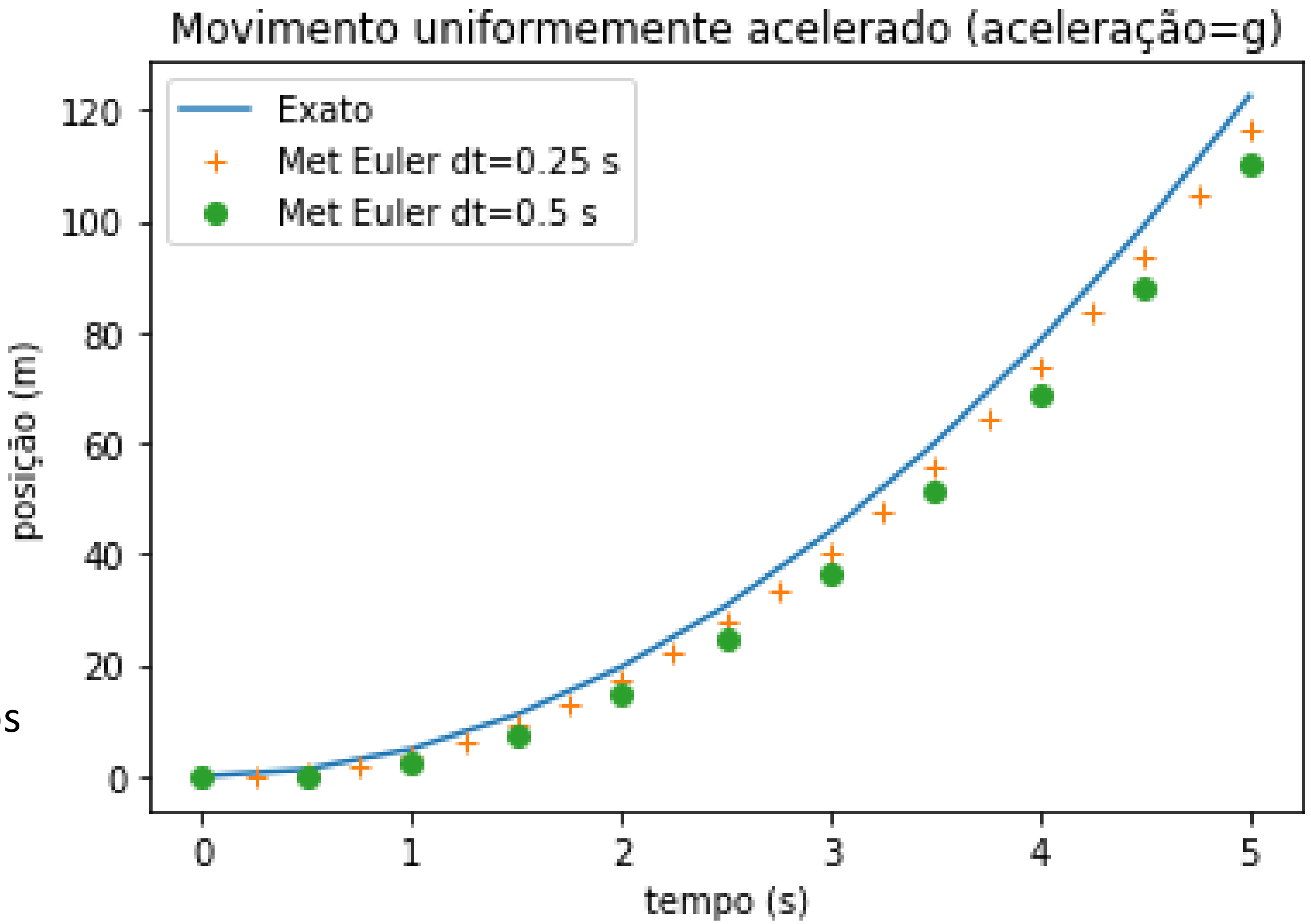
$$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t} \quad \text{ou} \quad \delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$$

Número de passos N e δt são inversamente proporcionais

Resultados dependem no passo temporal δt

Na figura, para t_f = 5s:

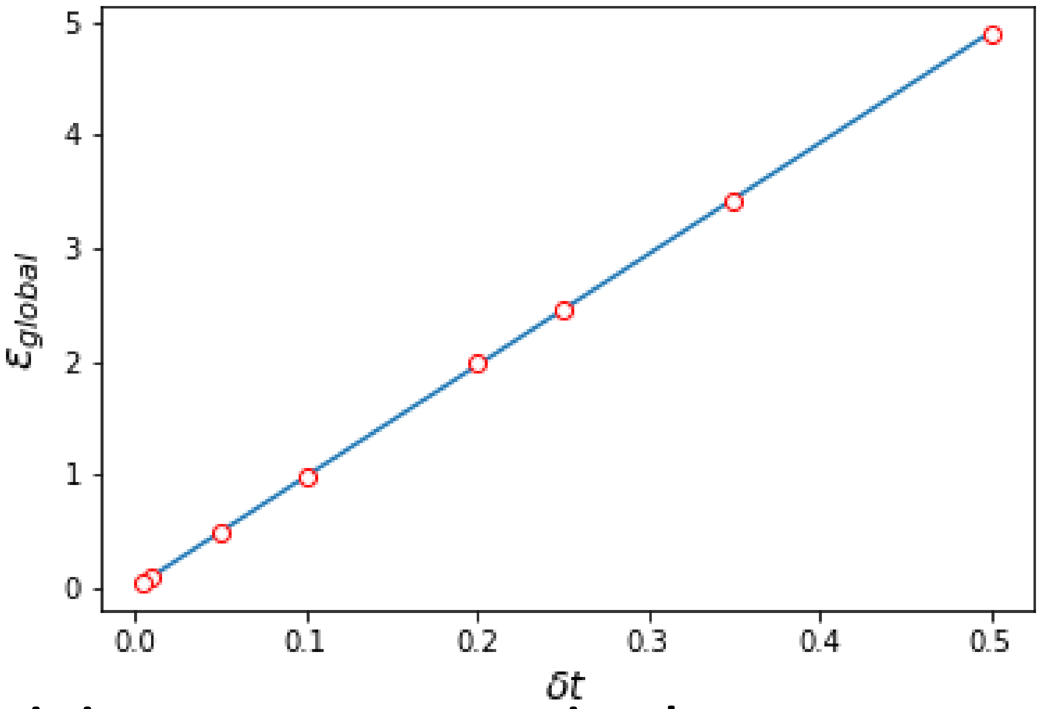
δt=0.5s N=10
δt=0.25s N=20 aproxima-se mais aos valores exatos



Exemplo do Método de Euler   Escolha do passo temporal δt

Vamos usar o erro na posição em *t*=2s para avaliar o método

δt	N	$x(2)_{Euler}$	$\varepsilon_{global} = \lvert x(2)_{exato} - x(2)_{Euler} \rvert$
0.5	4	14.7	4.9
0.25	8	17.15	2.45
0.1	20	18.62	0.98
0.05	40	19.1	0.50
0.01	200	19.502	0.10
0.005	400	19.550	0.05
$x(2)_{exato}$		**19.6000**	



O erro global do método de Euler é **proporcional ao passo, ou seja inversamente proporcional ao número de passos *N*.**

Método de Euler

E se não sabemos a velocidade?

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} = a_x(t)$$

aproximado por
$$\frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t)$$

para δt pequenos

Leonhard Euler 1707-1783

Então pelo mesmo racioncínio de antes:

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

Se soubermos no mesmo instante, t, a **velocidade** $v_x(t)$ e a **aceleração** $a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$ (a sua derivada)

Podemos calcular o valor da velocidade num instante posterior, $t + \delta t$.

Método de Euler **cálculo de velocidade**

$$v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x\ (t) \times \delta t$$

Leonhard Euler 1707-1783

E outra vez,

Comecando com $v_x(0) = v_{x0}$

Obtêm-se $v_x(\delta t) = v_{x0} + a_x(0)\ \times\ \delta t$

e de novo $v_x\ (\delta t + \delta t) = v_x(\delta t) + a_x(\delta t)\ \times \delta t$

e $v_x\ (2\delta t + \delta t) = v_x(2\delta t) + a_x(2\delta t)\ \times \delta t$ etc.

Pode-se calcular a velocidade em qualquer instante posterior ao instante inicial.

Método de Euler **velocidade e posição**

Podemos combinar o cálculo de posiçao e velocidade, fazendo duas integrações numéricas ao mesmo tempo:

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t \qquad\qquad v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x\,(t) \times \delta t$$

Se se conhecer

$$x(0) = x_0 \qquad\qquad v_x(0) = v_{x0}$$

Obtêm-se

$$x(\delta t) \approx x_0 + v_x\,(0) \times \delta t \qquad\qquad v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x\,(0) \times \delta t$$

e de novo

$$x(\delta t+\delta t) \approx x(\delta t) + \ v_x(\delta t) \times \delta t \qquad\qquad v_x(\delta t+\delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x\,(\delta t) \times \delta t$$

e

$$x(2\delta t+\delta t) \approx x(2\delta t) + \ v_x(2\delta t) \times \delta t \qquad\qquad v_x(2\delta t+\delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x\,(2\delta t) \times \delta t$$

… …

Implementação posição e velocidade

```
# Integração numérica de dx/dt = vx, e dv/dt = ax pelo Método de Euler
import numpy as np

#constantes
dt=0.01                                  # passo de tempo
tf=4.0
t0=0
x0=0
v0x=0
g=9.80

# numero de passos
n=np.int((tf-t0)/dt+0.1)   # +0.1 para não arredondar para baixo
# criar arrays
t=np.zeros(n+1)                          # n+1 elementos; último índice n
x=np.zeros(n+1)
vx=np.zeros(n+1)

#inicializar
vx[0]=v0x
t[0]=t0
x[0]=x0

# Método de Euler (n+1 elementos)
for i in range(n):
    ax[i] = g    # neste exemplo é simples,
                       # mas pode ser qualquer função de x[i] e vx[i]
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    vx[i+1]=vx[i] + ax[i]*dt  # atualizar velocidade sabendo aceleração
    t[i+1]=t[i]+dt
```

Erro cometido na aproximação de Euler

A fórmula no método de Euler é apenas aproximada

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t) \times \delta t + \textbf{ERRO}$$

Para saber o tamanho deste erro, comparamos com a série de Taylor:

Série de Taylor, exato

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta t^n}{n!} = 0$$

$$= \underbrace{v_x(t) + a_x(t)\,\delta t}_{\text{corresponde ao método de Euler}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^{\,2} + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^{\,3} + \mathcal{O}(\delta t^4)}_{\text{erro de truncatura}}$$

Erro cometido na aproximação de Euler

Método de Euler $$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t$$

Exato $$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{d^2v_x}{dt^2}\bigg|_t \delta t^{\,2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3v_x}{dt^3}\bigg|_t \delta t^{\,3} + \mathcal{O}(\delta t^4)}_{\text{erro (de truncatura)}}$$

Erro de truncatura local (um passo) proporcional a $\delta t^{\,2}$.

O cálculo de $v_x(t_f)$ usou N passos temporais δt.

O erro global ao fim de N passos é proporcional a $N\,\delta t^{\,2}$

que é igual a $N\left(\frac{t_f - t_0}{N}\right)^2 = \frac{(t_f - t_0)^2}{N} = (t_f - t_0)\delta t$

O erro de truncatura é proporcional ao **inverso** do **número de passos** N,
e **proporcional ao passo** δt

Erro em $x(t)$ obtem-se de forma semelhante:

Série de Taylor:

$$x(t+\delta t) = x(t) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

Método de Euler $\quad x(t+\delta t) = x(t) + [v_x(t) + \Delta v_x(t)]\delta t$

Exato $\quad x(t+\delta t) = x(t) + v_x(t)\,\delta t + \underbrace{\Delta v_x(t)\delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_t \delta t^{\,2} + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_t \delta t^{\,3} + \mathcal{O}(\delta t^4)}_{\text{erro (de truncatura)}}$

$\Delta v_x(t)$ = Erro em v_x até tempo t, proporcional a δt (slide anterior)

$\Rightarrow$ Erro de truncatura local (um passo) proporcional a $\delta t^{\,2}$.

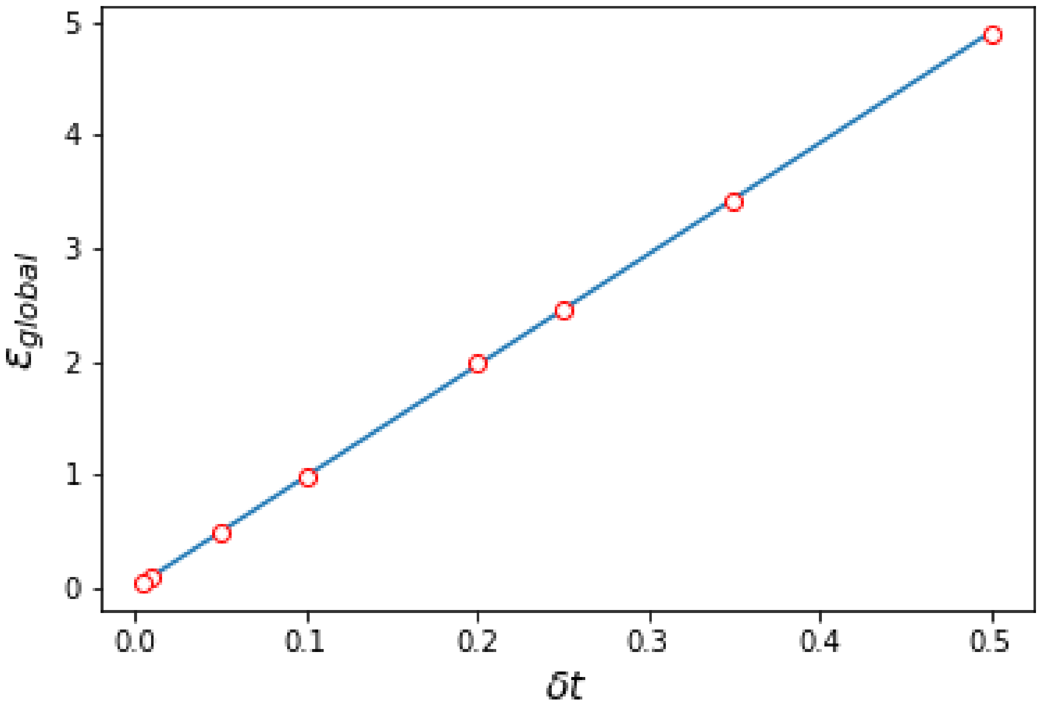
O erro global ao fim de N passos é proporcional a $N\,\delta t^{\,2} = N\left(\frac{t_f - t_0}{N}\right)^2 = \frac{(t_f - t_0)^2}{N} = (t_f - t_0)\delta t$

O erro de truncatura é proporcional ao **inverso** do **número de passos** N, e **proporcional ao passo** δt, tanto para $x(t)$ como para $v_x(t)$

Acorda com os resultados numéricos:

Erro na posição em *t*=2s

δt	N	$x(2)_{Euler}$	$\varepsilon_{global} = \lvert x(2)_{exato} - x(2)_{Euler} \rvert$
0.5	4	14.7	4.9
0.25	8	17.15	2.45
0.1	20	18.62	0.98
0.05	40	19.1	0.50
0.01	200	19.502	0.10
0.005	400	19.550	0.05
$x(2)_{exato}$		**19.6000**	



O erro global do método de Euler é **proporcional ao passo, ou seja inversamente proporcional ao número de passos *N*.**

Resumo: Movimento a 1D

- Quando a **aceleração é constante**, a solução pode ser obtida analiticamente utilizando as **equações cinemáticas**

$$v_x(t) = v_x(0) + a\,t$$
$$x(t) = x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2}at^{\,2}$$
$$v_x(t)^2 = v_x(0)^2 + \,2a[x(t) - x(0)]$$

- Em alguns casos de **aceleração não constante**, uma **solução analítica** pode ser obtida por **integração**

- O **método de Euler** funciona para qualquer função de aceleração, e dá resultados fiáveis se **escolhemos um passo de tempo δt adequado**

Os mesmos métodos são aplicáveis

ao **movimento ao longo de uma curva**, utilizando a distância ao longo da curva como a posição

ou aos casos em que o movimento numa dimensão **é independente de outros** movimentos (por exemplo, a posição vertical de um para-quedista)