Departamento de Física
Universidade de Aveiro

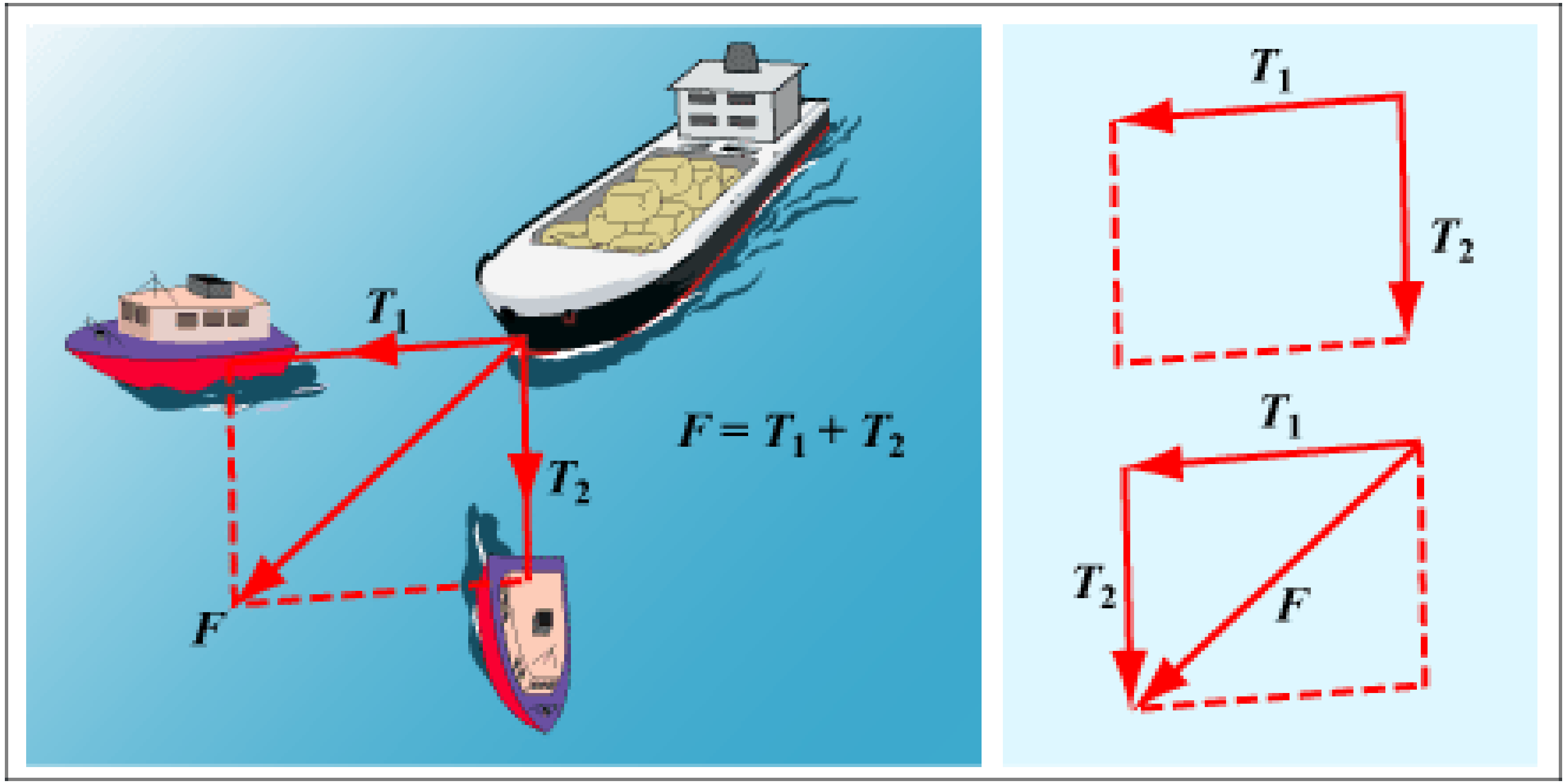
Modelação de Sistemas Físicos

Capítulo 3 Movimento no plano e no espaço: forças e vetores

Sumário:
- Vetores
- Forças e as leis de Newton
- Movimento a 2D e 3D

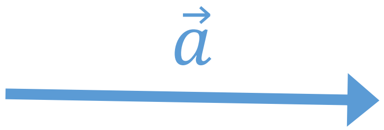
Bibliografia:
- Sørenssen, cap. 6
- Serway, cap. 3 (vetores) 4 (movimento 2D) e 5 (forças e movimento)
- Villate, cap. 4

Vetores



Matemática dos vetores

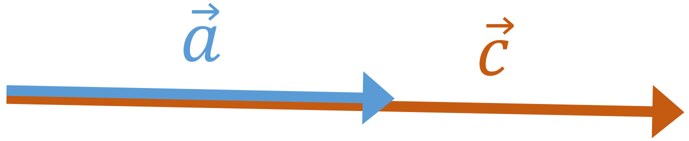
Vetor $\vec{a}$



definido pela direção e magnitude

$|\vec{a}|$ = módulo ou norma = intensidade, magnitude ou comprimento de $\vec{a}$

Multiplicação por um escalar



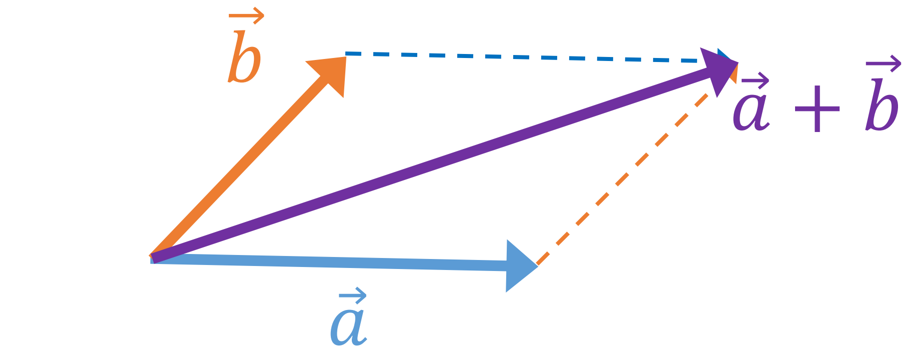
$\vec{c} = \lambda\vec{a}$ outro vetor, mesma direção, magnitude diferente

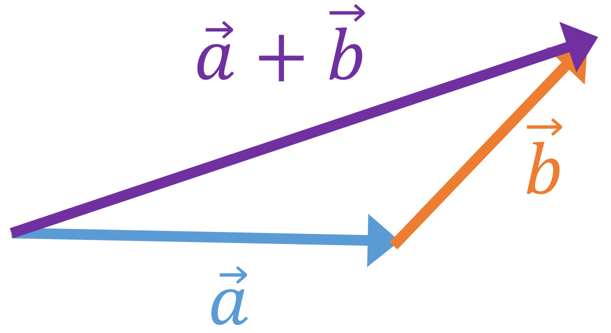
$|\vec{c}| = |\lambda||\vec{a}|$

Vetor unitário: $\hat{\imath}$ tem $|\hat{\imath}|= 1$

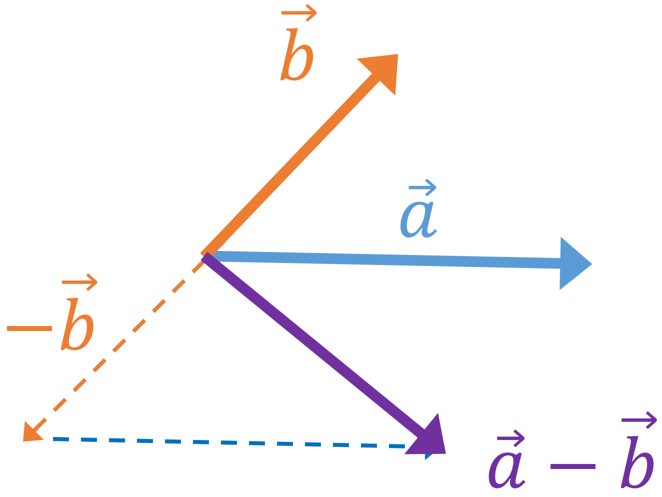
Usado para indicar direção e sentido ex. $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow \vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$

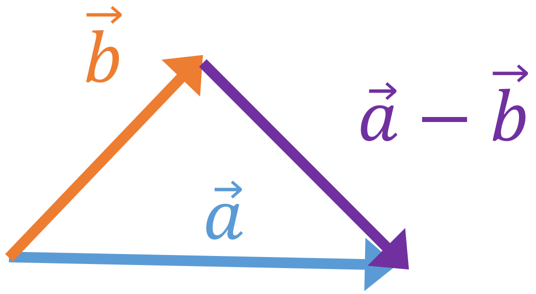
Soma de 2 vetores





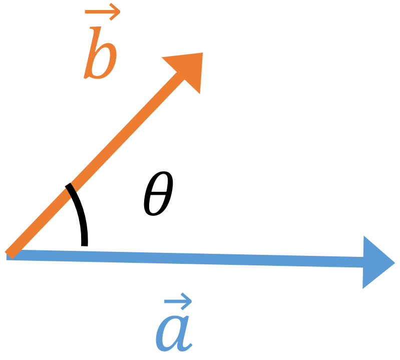
Diferença de 2 vetores

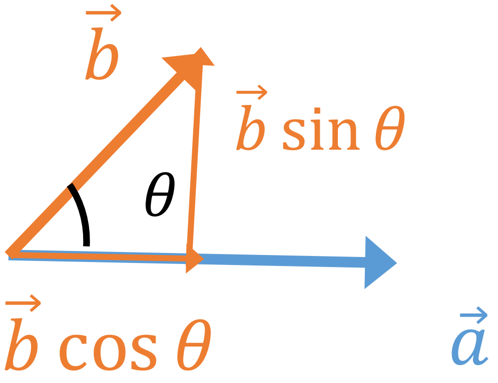




Produto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$





projeção de $\vec{b}$ na direção (e sentido) de $\vec{a}$

também chamado **produto interno**

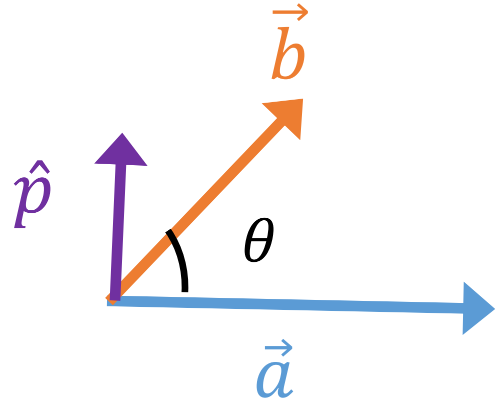
- Máximo quando os vetores são alinhados
- Zero quando são perpendiculares

Produto vetorial

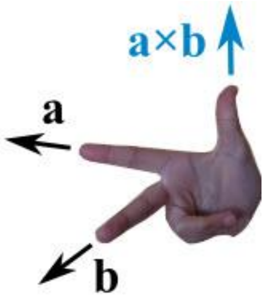
$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \, \hat{p}$$

vetor unitário perpendicular ao plano de $\vec{a}$ e $\vec{b}$

é um vetor perpendicular a ambos os vetores



Sentido de $\hat{p}$



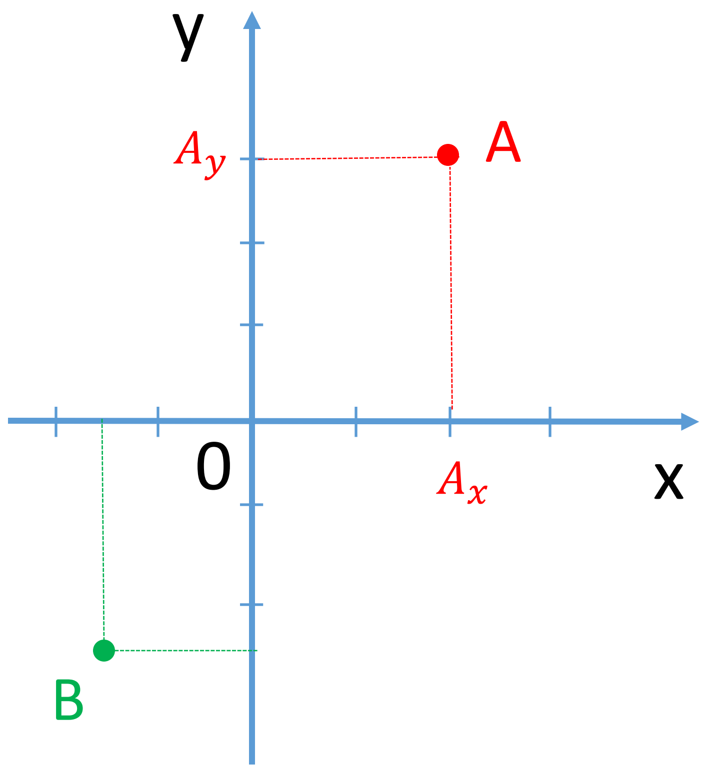
também chamado produto externo

- Máximo quando os vetores são perpendiculares
- Zero quando são paralelos

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

Vetores em referenciais cartesianos

2 dimensões



Posições dos pontos

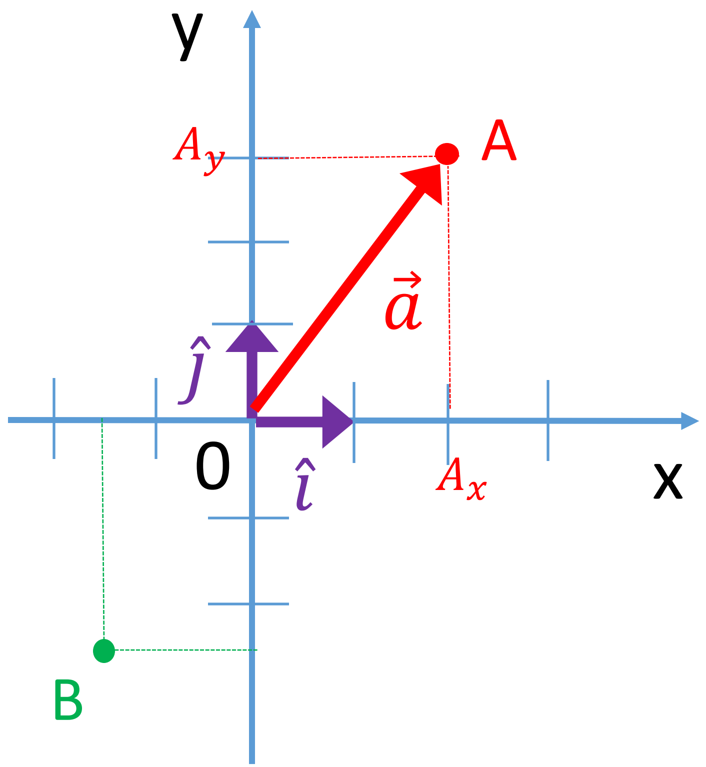
Orígem (0,0)

A em (A_x, A_y) = (2,3)

B em (-1.5,-2.5)

Vetores em referenciais cartesianos

2 dimensões



Posição A também indicada por um vetor $\vec{a}$, do orígem ao ponto A.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$\vec{a}_x$ componente paralelo ao eixo X
$\vec{a}_y$ componente paralelo ao eixo Y

Vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ para indicar os eixos:

$$\vec{a}_x = A_x\hat{\imath} \qquad \vec{a}_y = A_y\hat{\jmath}$$

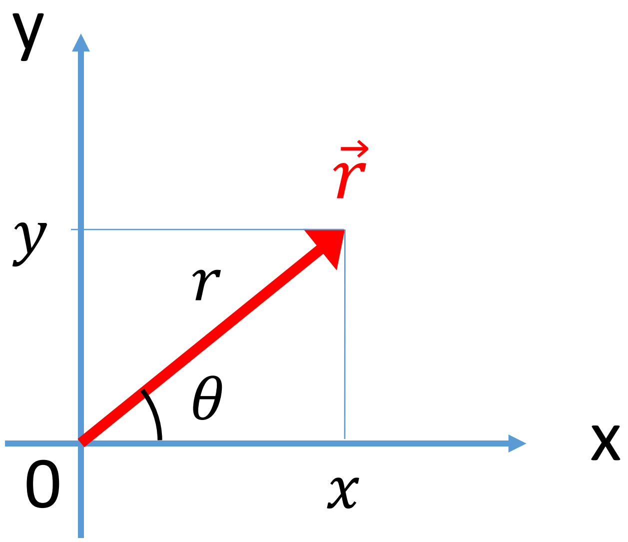
$$\vec{a} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$

$$|\hat{\imath}| = 1$$
$$|\hat{\jmath}| = 1$$
$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = 0$$

$$A_x = \vec{a}_x \cdot \hat{\imath}$$
$$A_y = \vec{a}_y \cdot \hat{\jmath}$$

Vetores em coordenadas polares

2 dimensões



O vetor $\vec{r}$ é definido por dois valores:

(x, y) coordenadas cartesianas

$$x = \vec{r} \cdot \hat{\imath} = |\vec{r}| \cos\theta$$

$$y = \vec{r} \cdot \hat{\jmath} = |\vec{r}| \sin\theta$$

ou

(r, θ) coordenadas polares

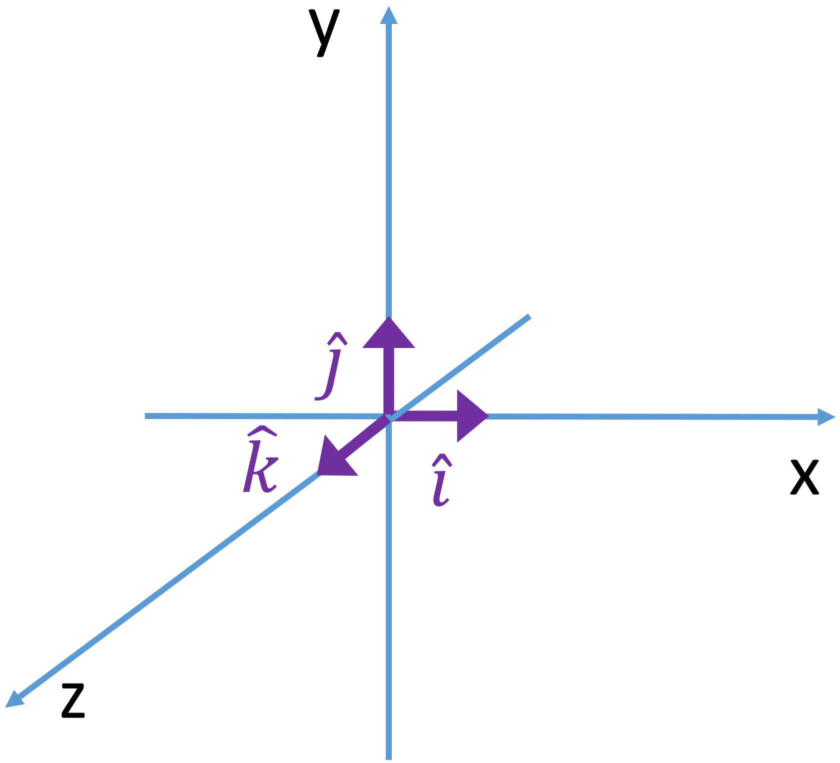
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \cos^{-1}(x/\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$= \sin^{-1}(y/\sqrt{x^2 + y^2})$$

Vetores em referenciais cartesianos

3 dimensões



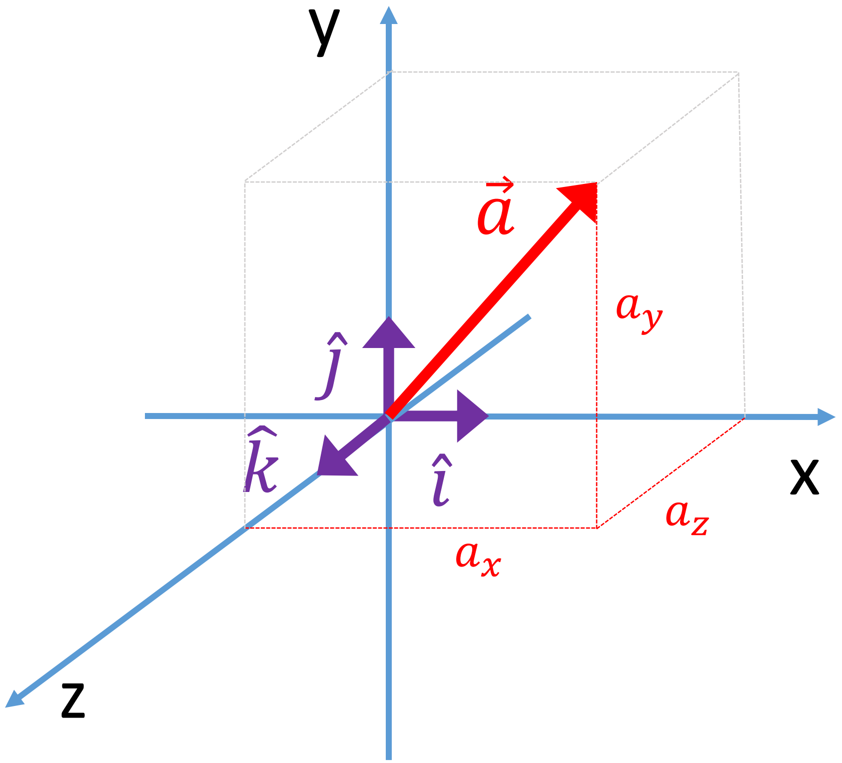
$$|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \quad \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

Vetores em referenciais cartesianos

3 dimensões



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Vetores em referenciais cartesianos

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \qquad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \qquad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

Soma de vetores

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$$

Produto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k})$$

$$= a_xb_x\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + a_yb_y\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + a_zb_z\hat{k}\cdot\hat{k}$$

desde que $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 0$

$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$ **escalar**

$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = 1$ etc.

Vetores em referenciais cartesianos

Produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

Ex.

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 0)\hat{\imath} + (0 - 0)\hat{\jmath} + (1 - 0)\hat{k}$$

$$= \hat{k}$$

Vetores em referenciais cartesianos

Igualdade entre vetores

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

$$\vec{c} = c_x\hat{\imath} + c_y\hat{\jmath} + c_z\hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \\ c_z = a_z - b_z \end{cases}$$

Problemas

A. Considere $\vec{a}$=(1,2,0) e $\vec{b}$=(3,-2,2).

Calcule

a) A sua soma
b) A sua diferença
c) O seu produto escalar
d) O seu produto vetorial

B. Considere $\vec{a}$=(2,1,0) e $\vec{b}$=(1,2,0). (Vetores a duas dimensões, pois ambos tem z=0)

Calcule

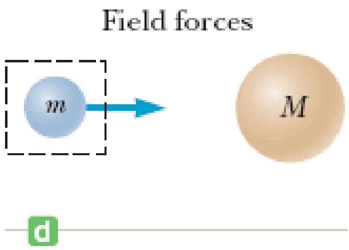
a) O módulo de cada vetor e o ângulo que formam.
b) O seu produto vetorial

Forças

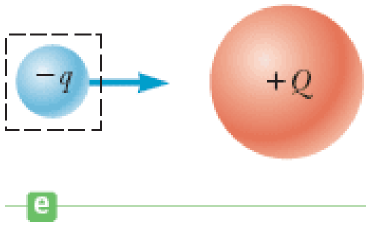
Forças alteram o movimento

Forças que actuam à distância (forças fundamentais)

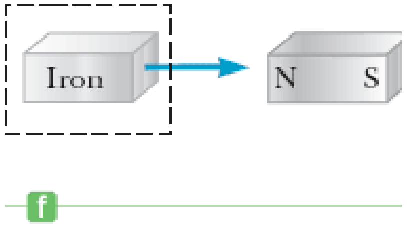
Força gravitacional



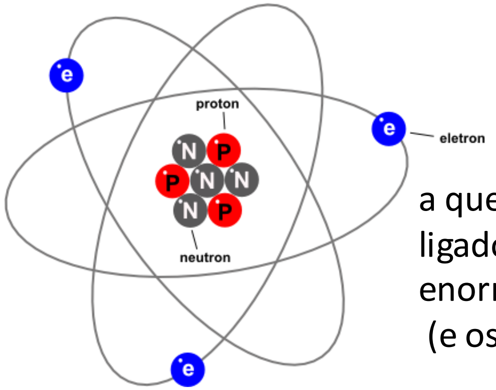
Força elétrica



Força magnética



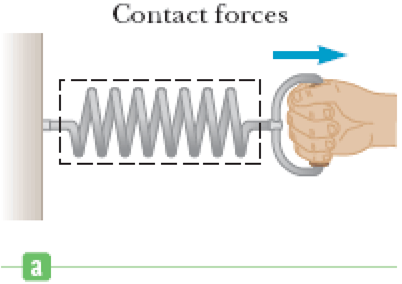
Força nuclear



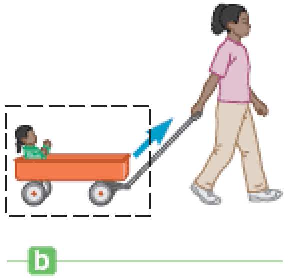
a que mantem os protões ligados, mais forte que a enorme forte repulsão elétrica (e os neutrões ligados)

Forças de contacto (forças derivadas)

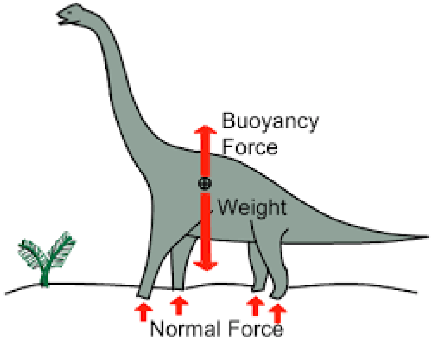
Força elástica



Força de tensão

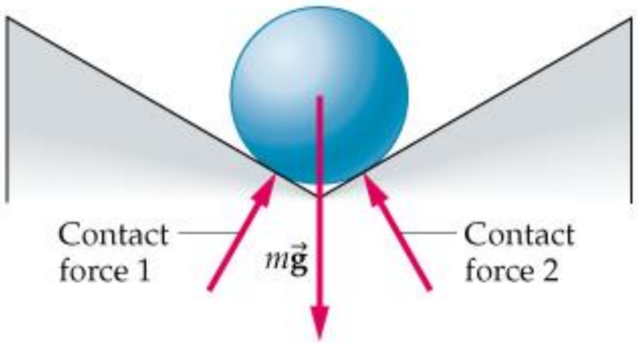


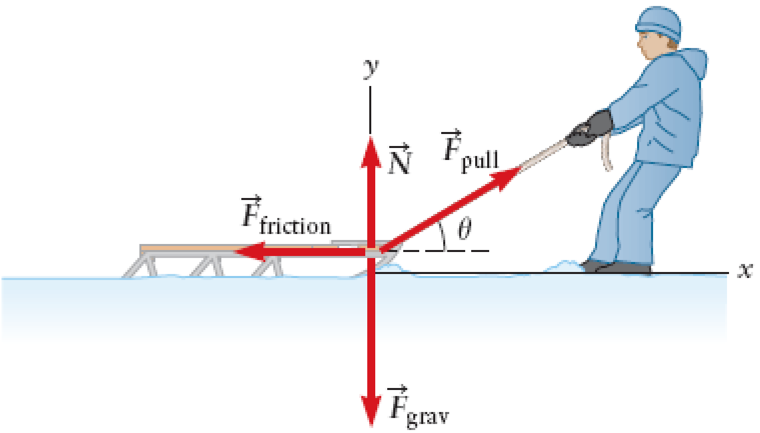
Força normal



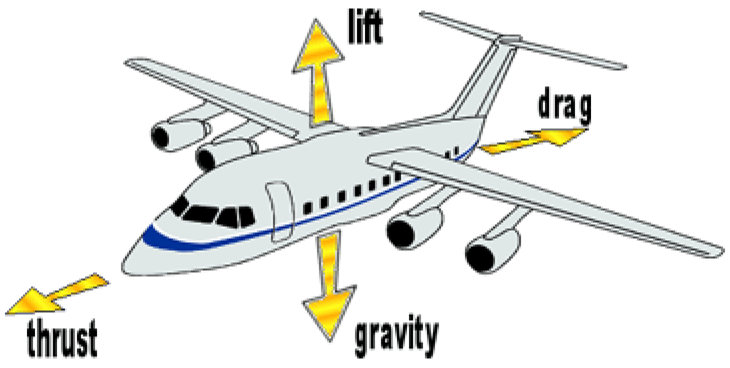
Força de atrito

Arrasto





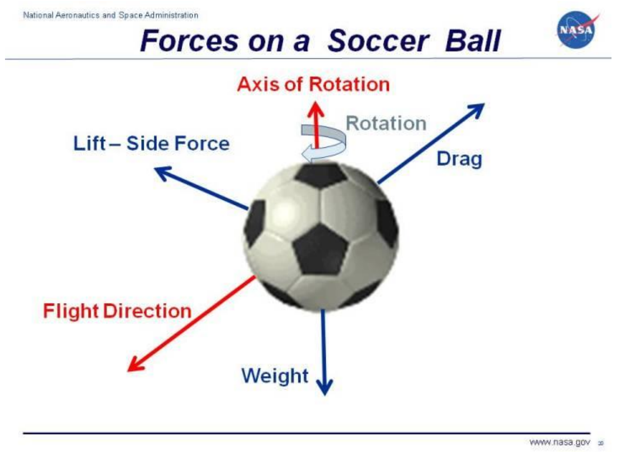
Força é um vetor



direção e magnitude

indica-se $\vec{F}$

intensidade $|\vec{F}|$



Os princípios da Mecânica

Isaac Newton 1642 - 1726

1ª lei de Newton:

Quando $\vec{F} = 0$ o corpo ou está parado ou move-se a uma velocidade constante.

2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

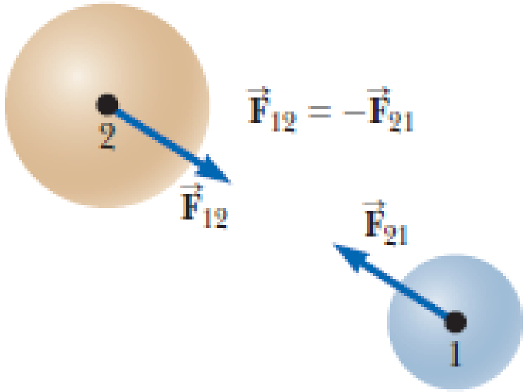
A **variação da velocidade** de um corpo (aceleração) é proporcional à **resultante das forças** (soma das forças) aplicadas ao corpo.

A constante de **proporcionalidade** é a **massa** m do corpo.

Massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

3ª lei de Newton:

Quando 2 corpos interatuam, as forças de um noutro são iguais e apostos



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$\vec{F}_{12}$ a força no corpo 1 devido à interação com o corpo 2
$\vec{F}_{21}$ a força no corpo 2 devido à interação com corpo 1,

Os princípios da Mecânica

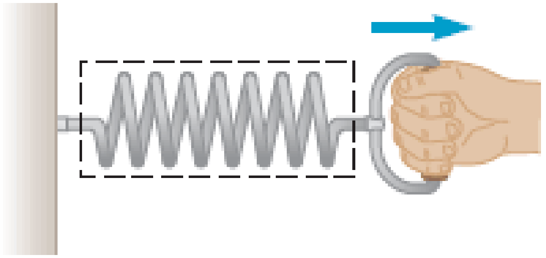
2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ $\quad\quad$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

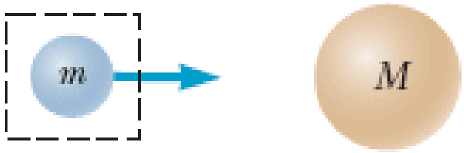
A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.
A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo.

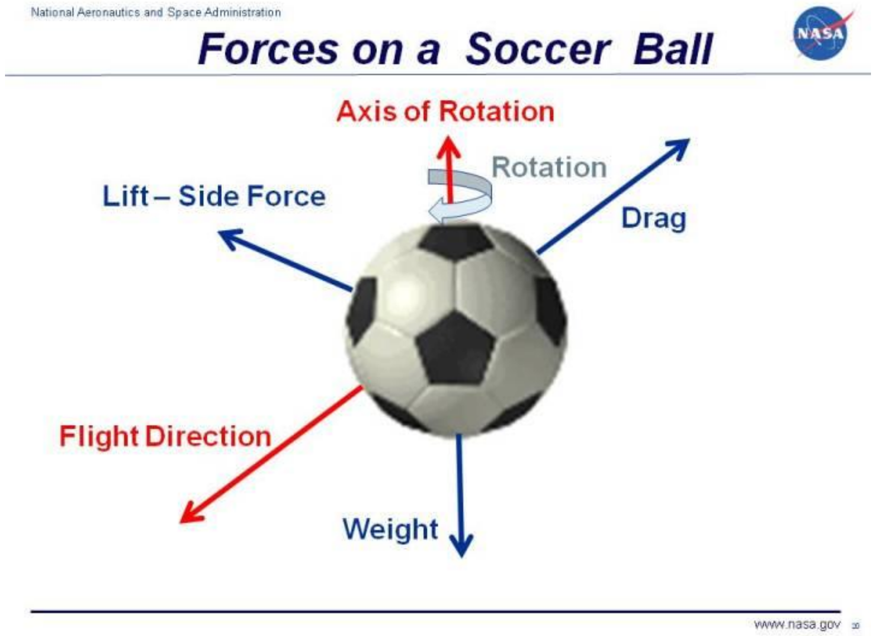
A massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

Se as **forças** aplicadas ao um objeto forem conhecidas,
pode-se determinar o **movimento** do objeto – a sua posição e velocidade.

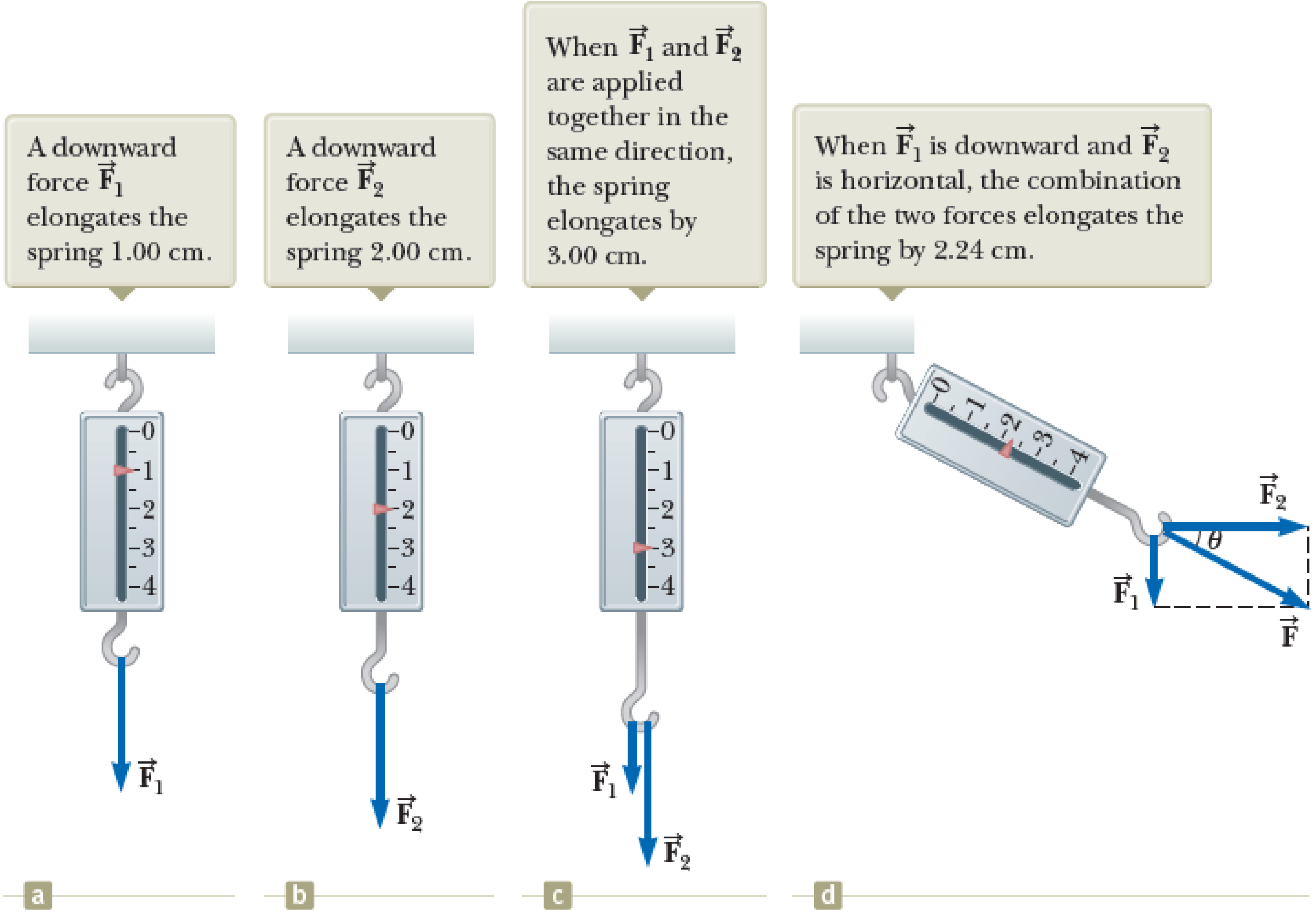
Forças determinam-se **por experiências** ou por **modelos teóricos**, que aplicados aos dados experimentais, concordam com eles.







A força elástica (mola)



$$\begin{cases} F_x = -k\ x \\ F_y = -k\ y \\ F_z = -k\ z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = -k\vec{r}$$

Força de resistência do ar

Experiências no volante de badmington

- Força oposta à velocidade $\vec{F} = -C(v)\,\hat{v}$

$$\vec{v} = |\vec{v}|\hat{v} \qquad \hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$$

- Proporcional ao quadrado da velocidade $\left|\vec{F}\right| \propto |\vec{v}|^2$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -m\,D|\vec{v}|^2\hat{v}$$

A 1D:

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath}$$

$$|\vec{v}\,| = |v_x| \qquad \hat{v} = \frac{v_x}{|v_x|}\hat{\imath}$$

$$\Rightarrow \quad F_x = -m\,D|v_x|^2\frac{v_x}{|v_x|} = -m\,D|v_x|v_x$$

Expressão válida para qualquer sentido do eixo e sentido da velocidade.

Força normal

$\vec{N}$ ou $\vec{n}$ é uma força de contato

- força exercida por uma superfície em resposta a uma força aplicada
- perpendicular à superfície, e oposto à força aplicada
- impede objectos cair/passar pela superfície (um sólido!)

Qual a orígem dessa força?

Forças eletrostáticas entre as eletrões nos dois objetos (repulsão) que resiste deformação e sobreposição

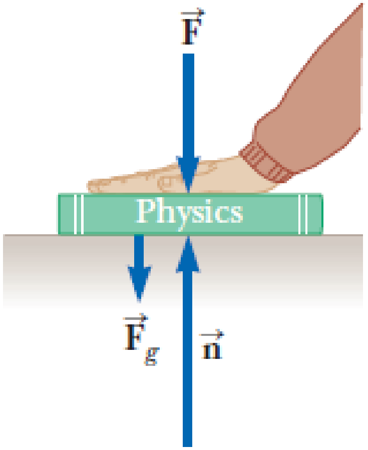


Figure 5.9 When a force $\vec{F}$ pushes vertically downward on another object, the normal force $\vec{n}$ on the object is greater than the gravitational force: $n = F_g + F$.

Ex: Forças aplicadas ao livro:

Peso	$\vec{P}$ ou $\vec{F}_g$
Força exercida pela mão	$\vec{F}$
Normal	$\vec{n}$

Não existe movimento $\Rightarrow \vec{P} + \vec{n} + \vec{F} = 0$ (1ª lei de Neton)

ou $\vec{n} = -(\vec{F} + \vec{P})$

Força de tensão

Força transmitida ao longo de um objeto extenso, como uma corda ou barra

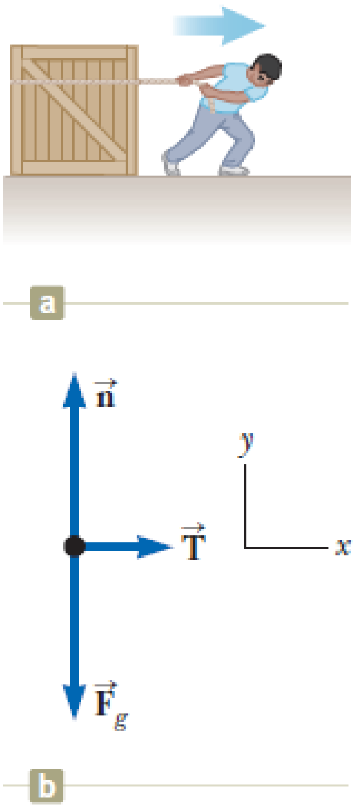
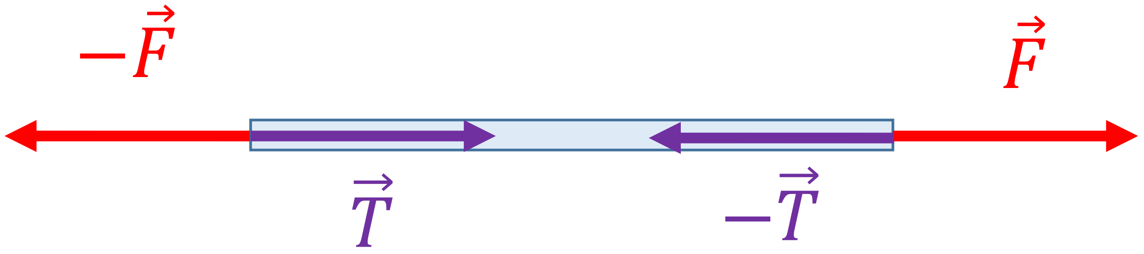


Figure 5.8 (a) A crate being pulled to the right on a frictionless floor. (b) The free-body diagram representing the external forces acting on the crate.

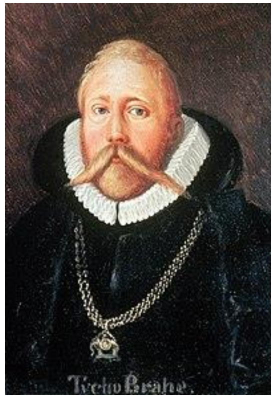


Gravidade

Moviment dos corpos celestes:

- Observação experimental de Tycho Brahe: medições precisas das posições e movimentos dos corpos celestes

- 3 Leis de Kepler (em concordância com as observações de Tycho Brahe):
    1. planetas com órbitas elíticas
    2. o segmento que une cada planeta ao sol, varre áreas iguais em tempos iguais.
    3. o quadrado do período de translação de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita



Tycho Brahe
1546-1601

Johannes Kepler
1571-1630

Peso:

Os objetos experimentam uma força Força vertical, aponta para baixo, e proporcional à sua massa.

$$\left|\vec{P}\right| = m\,|\vec{g}|, \qquad |\vec{g}| = g = 9.80 \text{ m/s}^2$$ aceleração da gravidade (na superfície da terra)

Os dois fenómenos resultam da mesma força, gravidade!

Lei da gravidade de Newton:

Força atrativa ao longo da reta entre os dois corpos
Proporcional a ambas as massas

$$\vec{F}_{grav} = G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\ \hat{r}$$

$|\vec{r}| = d$, distância entre 2 corpos $\qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$G = 6.67259 \times 10^{-11}$ N·m²/kg²

Movimento dos corpos celestes:

- A lei de Newton prevê as leis de Kepler
- Consistente com todas as observações dos movimentos dos corpos celestes

Peso:

$$|\vec{F}_{grav}| = G\frac{m\,M_{Terra}}{{R_T}^2}$$

$$|\vec{P}| = m\,|\vec{g}|$$

$$\Rightarrow g = |\vec{g}| = G\frac{M_{Terra}}{{R_T}^2} = 9.82 \text{ m/s}^2$$

$M_{Terra} = 5.97 \times 10^{24}$ kg Massa da Terra

$R_T = 6.37 \times 10^{6}$ m Distância até ao centro da Terra

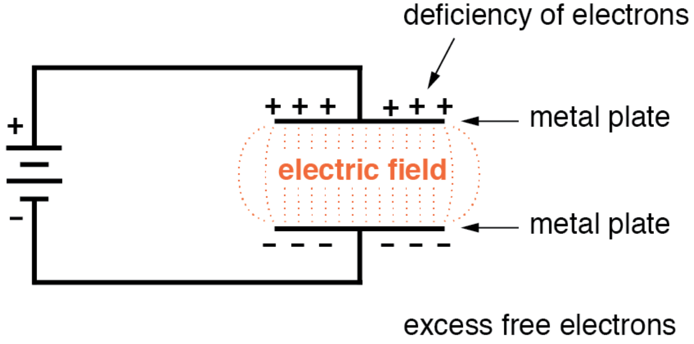
Força elétrica (eletrostática)

Charles-Augustin de Coulomb
1736-1806

- Lei elétrica entre duas cargas, q e Q (por experiências e medições)
- Força atrativa entre cargas de sinais opostos e repulsiva entre cargas de igual sinal
- Na direção ao longo da reta entre as duas cargas

$$\left|\vec{F}_{elét}\right| = K\frac{q\,Q}{d^2}$$

$K = 8.987551\ \times 10^9$ N·m²/C² (constante de Coulomb)
d distância entre 2 cargas



- Força elétrica aplicada a um corpo de carga elétrica q , num campo elétrico $\vec{E}_{elét}$

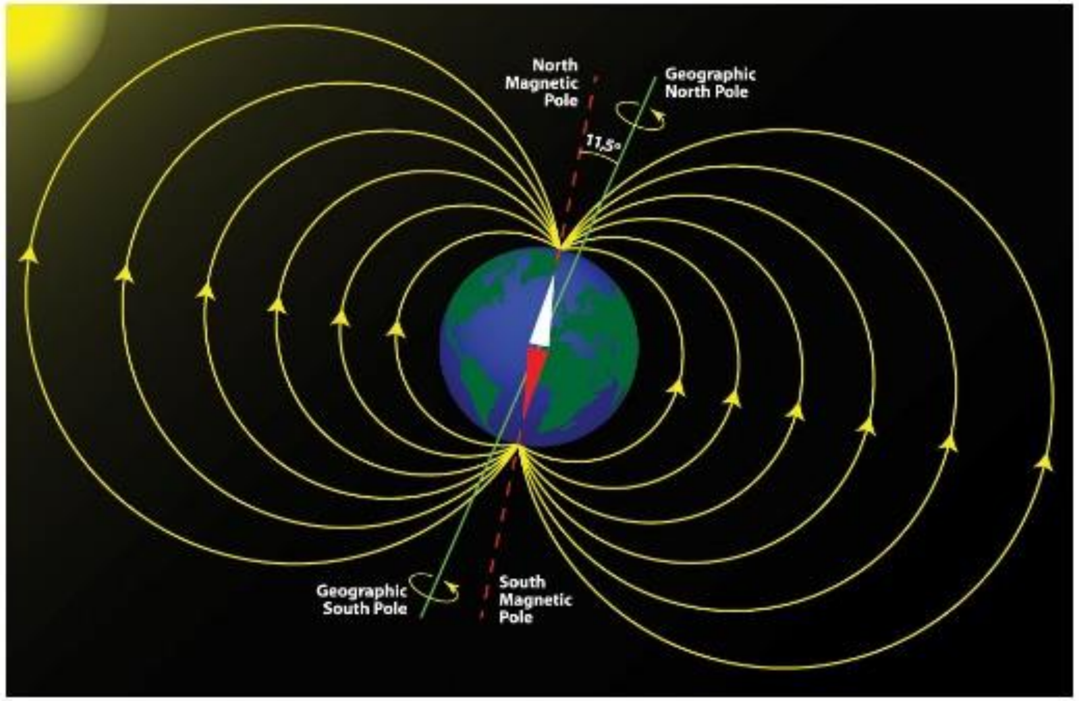
$$\vec{F}_{elét} = q\,\vec{E}_{elét}$$

Força magnética

- Força magnética aplicada a um corpo de carga elétrica q em movimento num campo magnético $\vec{B}_{mag}$

$$\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v}\,\times\vec{B}_{mag}$$

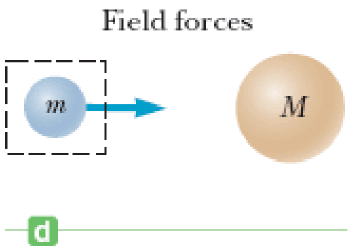
Charles-Augustin de Coulomb
1736-1806



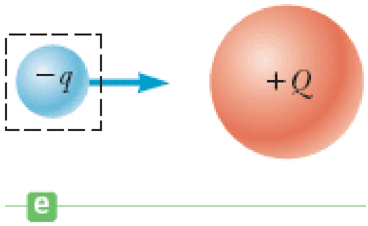
Forças alteram o movimento

Forças que actuam à distância (forças fundamentais)

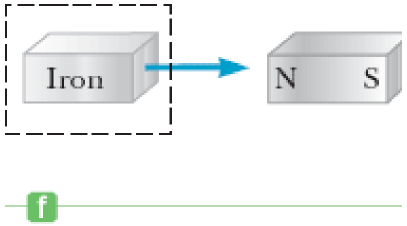
Força gravitacional



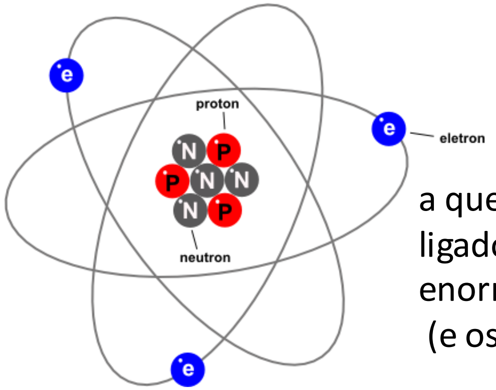
Força elétrica



Força magnética



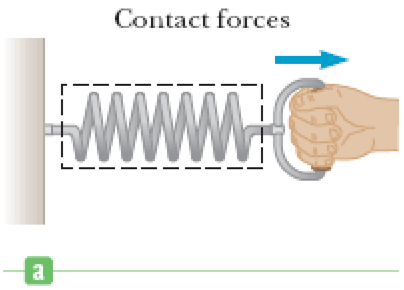
Força nuclear



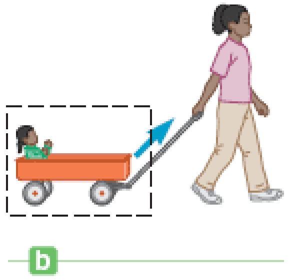
a que mantem os protões ligados, mais forte que a enorme forte repulsão elétrica (e os neutrões ligados)

Forças de contacto (forças derivadas)

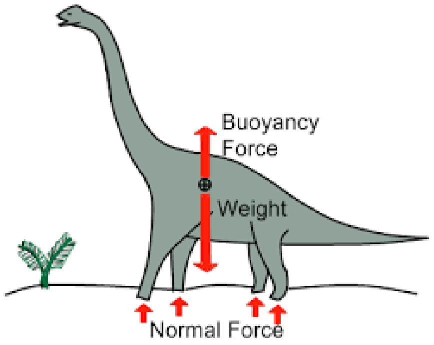
Força elástica



Força de tensão



Força normal



Força de atrito

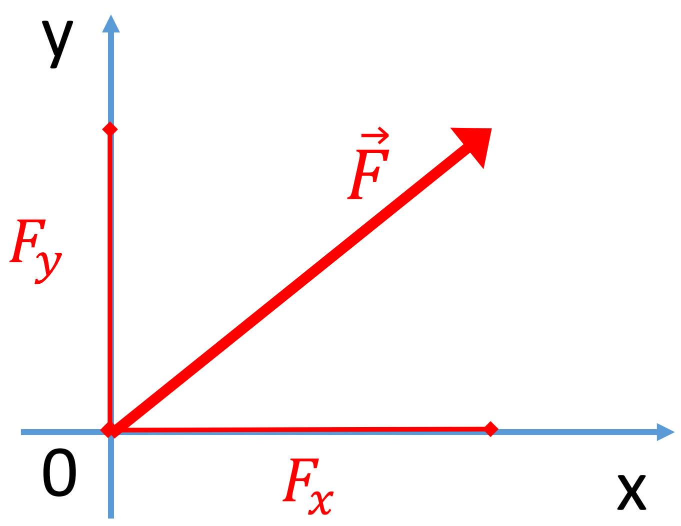
Arrasto

Forças como vetores

Componentes de uma força

Em 2D:

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$$



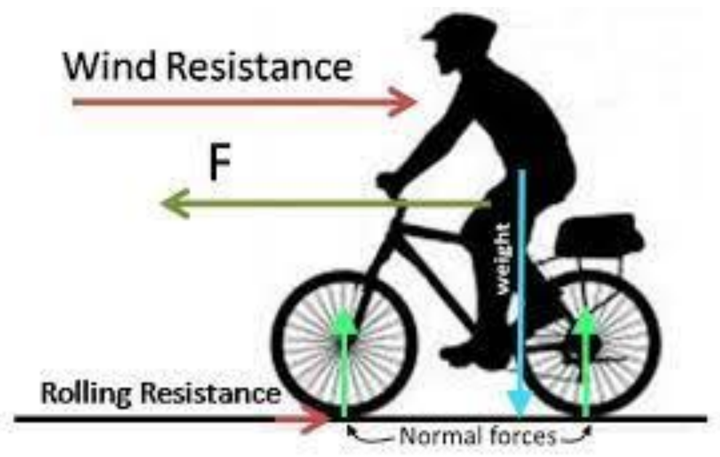
Em 3D:

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$$

F_x, F_y, F_z escalares

$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ vetores unitários,
paralelos aos eixos XX, YY, ZZ

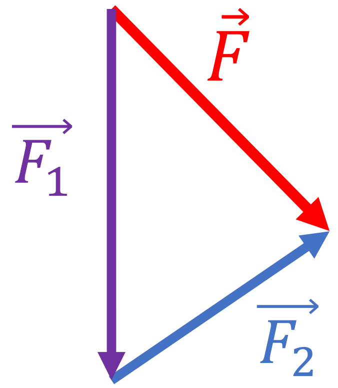
Mais do que uma força



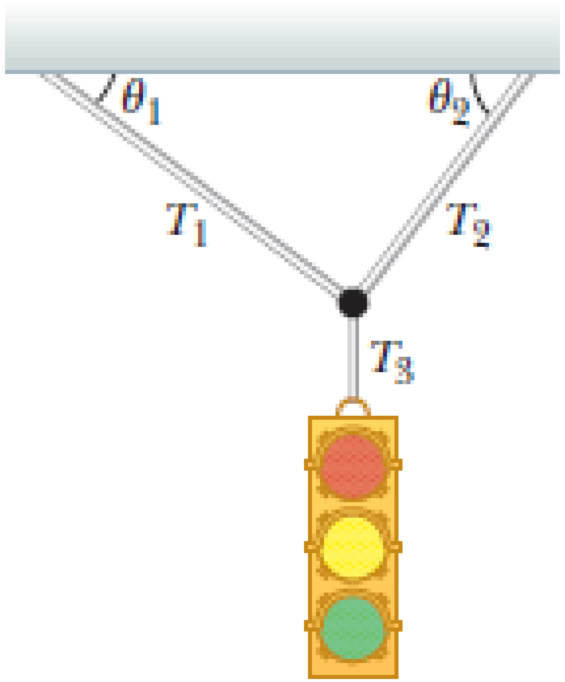
O movimento de um objeto é determinado pela soma das forças (vetoriais) que nele atuam.

Força resultante $$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$F_x = \sum_i F_{i\,x} \qquad F_y = \sum_i F_{i\,y} \qquad F_z = \sum_i F_{i\,z}$$



Soma vetorial: componente da soma = a soma dos componentes

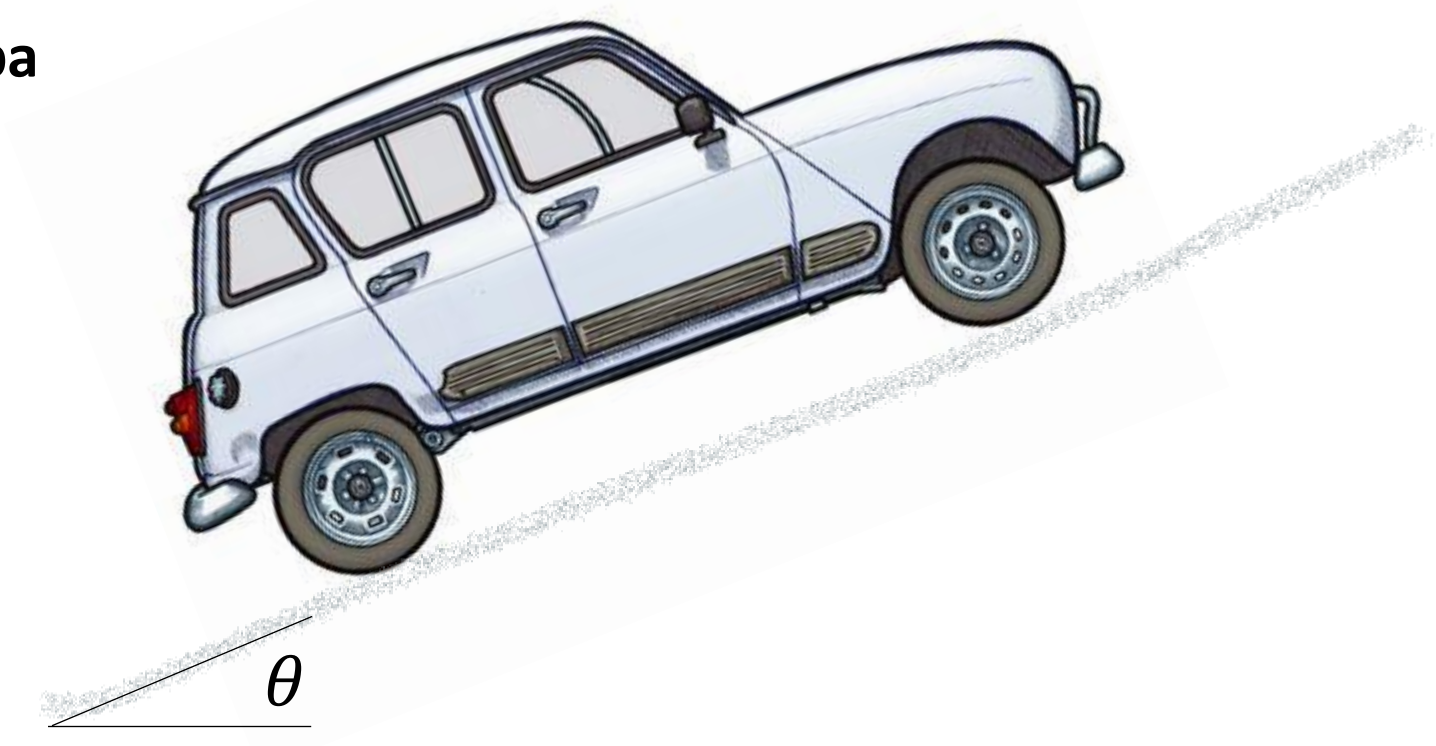


Exemplo: Tensão em direções diferentes

- O semáforo não cai porque a força resultante é nula.
- $\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$
- 1ª lei de Newton

Se soubermos os ângulos e o peso do semáforo, como é que podemos calcular T_1 e T_2?

Exemplo: Carro numa rampa



Quais são as forças que atuam no carro?

Quais são os componentes paralelos e perpendiculares à superfície?

Qual a direção da força resultante?

Movimento no plano e no espaço

2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

- A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.
- A massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

Se as **forças** aplicadas ao um objeto forem conhecidas,
pode-se determinar o **movimento** do objeto – a sua posição e velocidade.

Forças determinam-se por experiências
Ou por modelos teóricos, que aplicados aos dados experimentais, concordam com eles.

Movimento no plano e no espaço

Lembre-se: Relação entre as quantidade de interesse do **movimento a 1 dimensão**

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}$

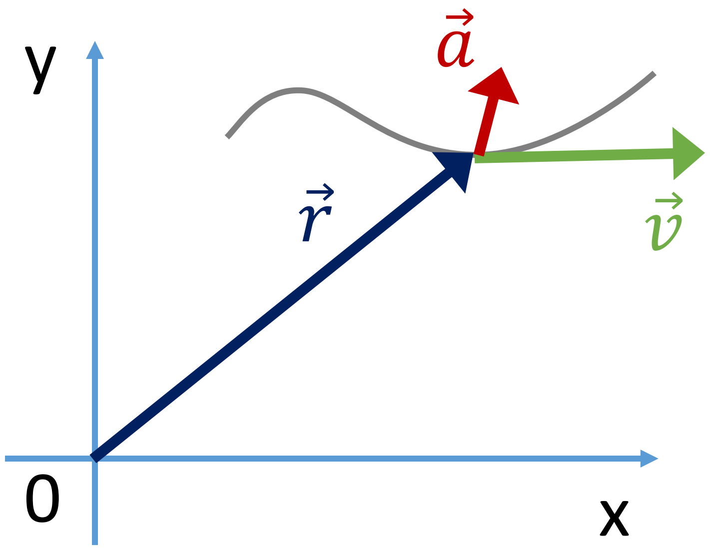
Aceleração instantânea: $a_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt}$

Relação entre a força aplicada e a aceleração:

$$F_x(t) = m\, a_x(t) \quad \Leftrightarrow \quad F_x(t) = m\frac{dv_x(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Agora, como fazemos em 3D?

Posição, velocidade e aceleração também são vetores

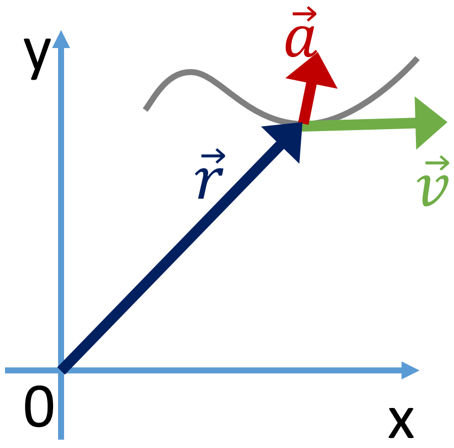


Posição	$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$
Velocidade	$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$
Aceleração	$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Como funcionam as derivadas dos vetores?

Derivadas dos Vetores



Posição $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$

Velocidade $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

Ou seja $$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Similarmente $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

Desde que os três componentes são perpendiculares, os componentes das variáveis paralelos a cada eixo são relacionadas entre eles como no caso de movimento a 1D

Se soubermos as forças aplicadas, saberemos a aceleração

$$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}(t) = m\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$\vec{r}(t) = (x, y, z)$

Os componentes das variáveis paralelos a cada eixo são relacionadas entre eles como no caso de movimento a 1D

$$F_x(t) = ma_x(t) \qquad F_y(t) = ma_y(t) \qquad F_z(t) = ma_z(t)$$

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt \qquad v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t)\,dt \qquad v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_z(t)\,dt$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt \qquad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,dt \qquad z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(t)\,dt$$

$\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ podem ser calculados (i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Exemplo: Carro num plano inclinado

Um carro desce, sem atrito, uma colina inclinada de ângulo θ , com o motor desligado. Calcule a aceleração que adquire nessa descida.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{n} = m\vec{a} \qquad\qquad \vec{F}_g = \vec{P}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x + n_x = ma_x \\ F_y = P_y + n_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = \ m\, g \sin\theta + 0 = ma_x \\ F_y = -\, m\, g\, \cos\theta + |\vec{n}| = 0 \end{cases}$$

a força normal anula as forças na direção OY

$$\Longrightarrow \qquad a_x = g \sin\theta$$

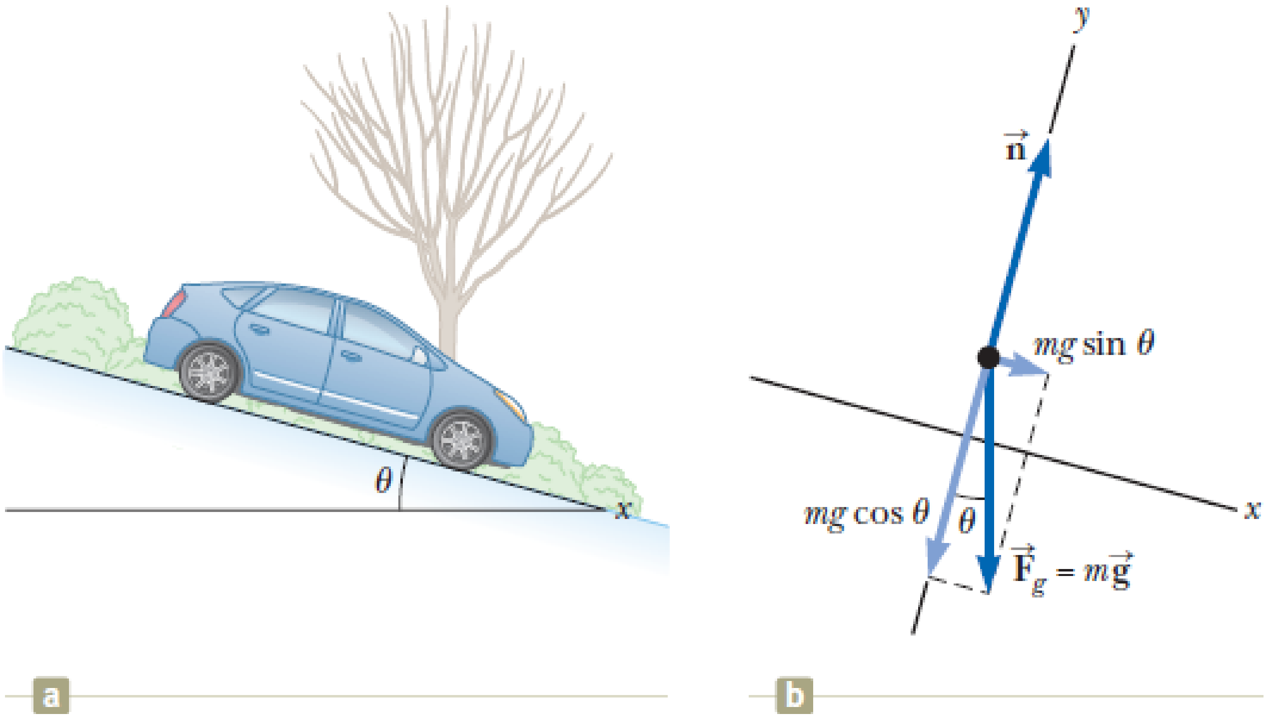


Figure 5.11 (Example 5.6) (a) A car on a frictionless incline. (b) The free-body diagram for the car. The black dot represents the position of the center of mass of the car. We will learn about center of mass in Chapter 9.

Exemplo: trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar

Modelo:

O movimento ou a trajetória da bola é devido à bola estar sempre sujeita à força da gravidade.

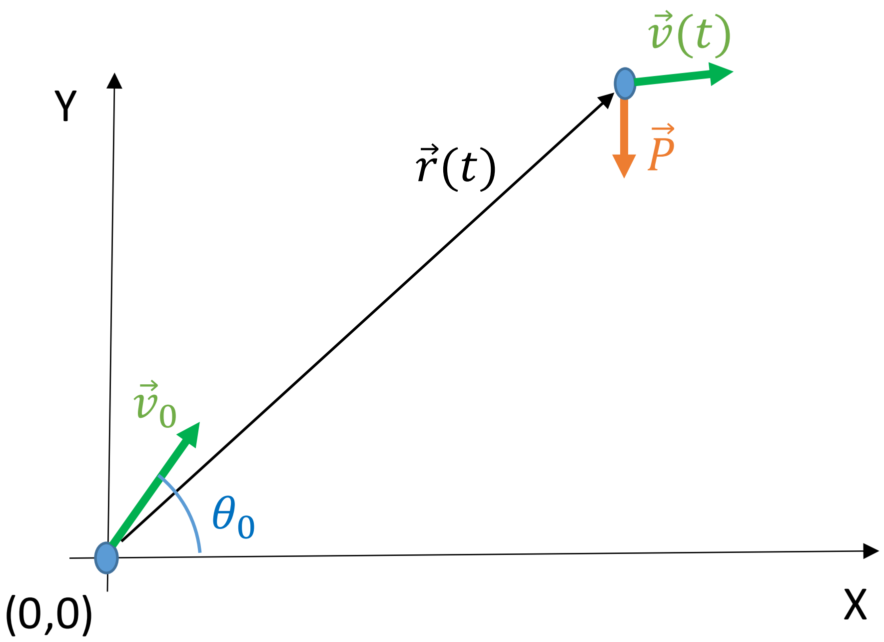
Num 1º estudo, não vamos considerar o efeito da resistência do ar, a rotação da bola, o efeito de altitude, impulsão, a rotação da Terra, …

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad \text{em que} \qquad \vec{F} = \vec{P}$$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo, e inicia o seu movimento com uma velocidade $\vec{v}_0$, a fazer um ângulo θ_0 com a horizontal (solo).

Trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar

Usamos coordenadas cartesianas, e organizamos todas as variáveis em componentes horizontal (*x*) e vertical (*y*)



Condições iniciais:

A bola é pontapeada no solo, na posição $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$

e inicia o seu movimento com uma velocidade $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$

de magnitude $|\vec{v}_0|$

e a fazer um ângulo θ_0 com a horizontal

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0 \,, |\vec{v}_0| \sin\theta_0)$$

Força:

A única força é o peso da bola, com orientação vertical para baixo

$$\vec{P} = -m\, g\, \hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \end{cases}$$

Aceleração:

$$\vec{P} = m\, \vec{a} \qquad \Rightarrow \begin{cases} P_x = m a_x \\ P_y = m a_y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a_x = 0} \\ \boldsymbol{a_y = -g} \end{cases}$$

Trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$$
$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0\,, |\vec{v}_0| \sin\theta_0)$$
$$t_0 = 0\ s$$

Neste caso, a aceleração vertical não depende dos variáveis horizontais, e vice versa

Efetivamente, trata-se de dois problemas 1D independentes

horizontal:

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad v_x(t) - v_{0x} = \int_0^t 0\, dt \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_x(t) = v_{0x}}$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_{0x}\, dt \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x(t) = x_0 + v_{0x}\, t}$$

vertical:

$$v_y(t) - v_y(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_y(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad v_y(t) - v_{0y} = \int_0^t -g\, dt \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_y(t) = v_{0y} - gt}$$

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_y(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} [v_{0y} - gt] dt \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y(t) = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2}$$

Trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$$
$$\vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}\right) = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0\,, |\vec{v}_0| \sin\theta_0)$$
$$t_0 = 0\ s$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}\, t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

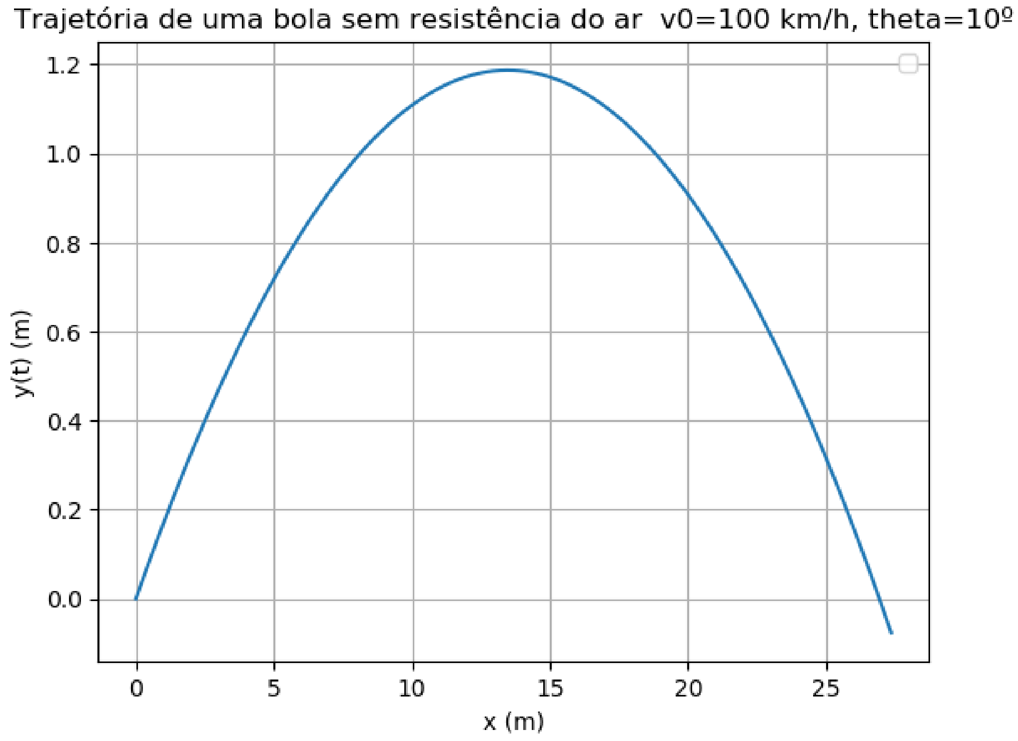
relação entre *y* e *x*:

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$ (da equação para v_x)

$$y(t) = y_0 + v_{0y}\left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}[x(t) - x_0] - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}[x(t) - x_0]^2$$

equação da parábola



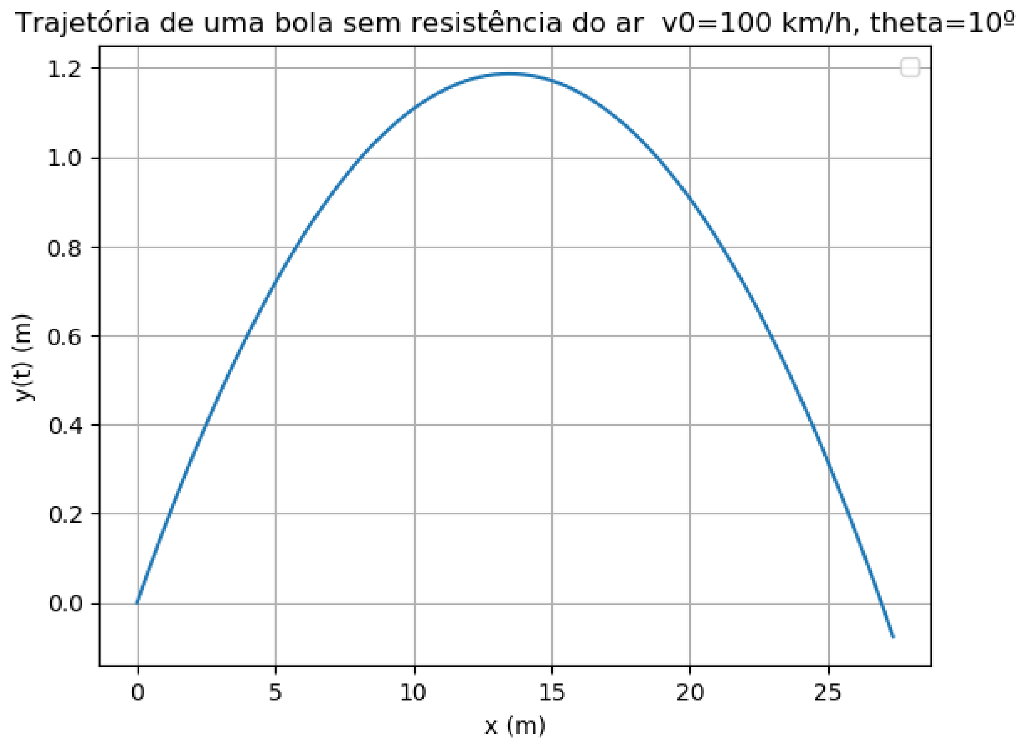
Trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0{,}0) \\ \vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}\right) = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0 \,, |\vec{v}_0| \sin\theta_0) \\ t_0 = 0\ s \end{array}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}\, t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\, t \; - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}[x(t) - x_0] - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}[x(t) - x_0]^2$$



Perguntas:

1. Qual a altura máxima e quando a atinge?

2. Qual o alcance e quando o alcança?

Trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}\, t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\, t \; - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}[x(t) - x_0] - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}[x(t) - x_0]^2$$

Perguntas:

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)?

quando $\frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0$ $\Longrightarrow$ $t_m = \frac{v_{0y}}{g}$ e $y_m = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}$

ou, $\frac{dy(x)}{dx} = 0$

2. Qual o alcance (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo}?

quando y=0

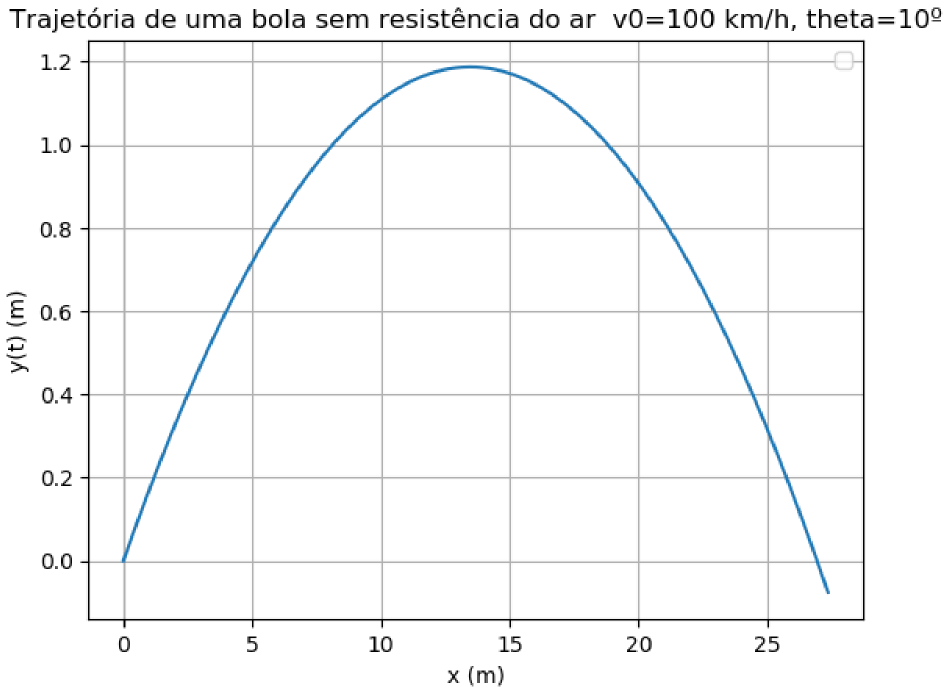
quando $y_0 = 0$ e $x_0 = 0$ temos

$t_{solo} = \frac{2\, v_{0y}}{g}$ e $x_{solo} = \frac{2\, v_{0x}\, v_{0y}}{g}$

Trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)? $t_m = \frac{v_{0y}}{g}$ e $y_m = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}$

2. Qual o alcance (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo}? $y_0 = 0$ e $x_0 = 0$,
temos $t_{solo} = \frac{2\, v_{0y}}{g}$ e $x_{solo} = \frac{2\, v_{0x}\, v_{0y}}{g}$



Ex: $|\vec{v}_0| = 100$ km/h = 27.78 m/s
$\theta_0 = 10°$
$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0{,}0)$

$\vec{v}_0 = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0\, , |\vec{v}_0| \sin\theta_0) = (27.36\, , 4.82)$ m/s

$t_m = 0.49$ s
$y_m = 1.19$ m

$t_{solo} = 0.98$ s
$x_{solo} = 26.9$ m

Exemplo: trajetória de uma bola de futebol <u>COM</u> resistência do ar.

Modelo: O movimento ou a trajetória da bola é devido à bola estar sempre sujeita à força da gravidade, e resistência do ar proporcional à velocidade quadrado.

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

em que

$$\vec{F} = \vec{P} - mD|\vec{v}|^2\hat{v}$$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo, e inicia o seu movimento com uma velocidade $\vec{v}_0$, a fazer um ângulo θ_0 com a horizontal (solo).

Trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar

$$\vec{F} = \vec{P} - m\, D|\vec{v}|^2 \hat{v} \qquad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad D = g/v_T^2$$

Esta força não altera o plano do movimento. Temos ainda um problema a 2D.

Componentes horizontal e vertical:

$$\begin{cases} F_x = P_x - m\, D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = P_y - m\, D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases} \qquad P_x = 0, \quad P_y = -mg$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = \quad -D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

Como sabemos a força, e a aceleração, a velocidade e a posição são obtidos por integração.

Neste caso, a aceleração vertical <u>depende</u> da velocidade horizontal, e vice versa

O movimento em ambos os eixos deve ser resolvido simultaneamente.

Trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar

Como o movimento é no plano, temos quatro equações diferenciais para integrar:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y(t) = \frac{dy}{dt},$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$$

Neste caso não é possível integrar analiticamente.

Mas podemos integrar numericamente usando o método de Euler

Podemos implementar o seu cálculo num programa python, acrescentando umas linhas (e as que lhe fornecem informação) no ciclo dum programa que implemente o método de Euler.

```
for i in range(n):                          # Método de Euler (n+1 elementos)
    t[i+1]=t[i]+dt
    ax= ...
    vx[i]= vx[i]+ax*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    ay= ...                                 # adicionar linhas para a 2ª dimensão
    vy[i]= vy[i]+ay*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

Trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar

$$\begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

1º Cálculo da velocidade por integração com o método de Euler das duas relações diferenciais:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$$

a 2D:

$$v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$
$$v_y(t+\delta t) \approx v_y(t) + a_y(t) \times \delta t$$

Implementação:

```
D = g/vt**2
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2) #norma de v
   ax[i]=-D*vv*vx[i]
   ay[i]=-g-D*vv*vy[i]
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
```

Trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar

$$\begin{cases} a_x = -\,D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

2º Cálculo da posição por integração com o método de Euler das duas relações diferenciais:

$$v_x\,(t) = \frac{dx}{dt} \qquad v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

a 2D:

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t) \times \delta t$$
$$y(t+\delta t) \approx y(t) + v_y\,(t) \times \delta t$$

Implementação:

```
D = g/vt**2
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2) #norma de v
   ax[i]=-D*vv*vx[i]
   ay[i]=-g-D*vv*vy[i]
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
   y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

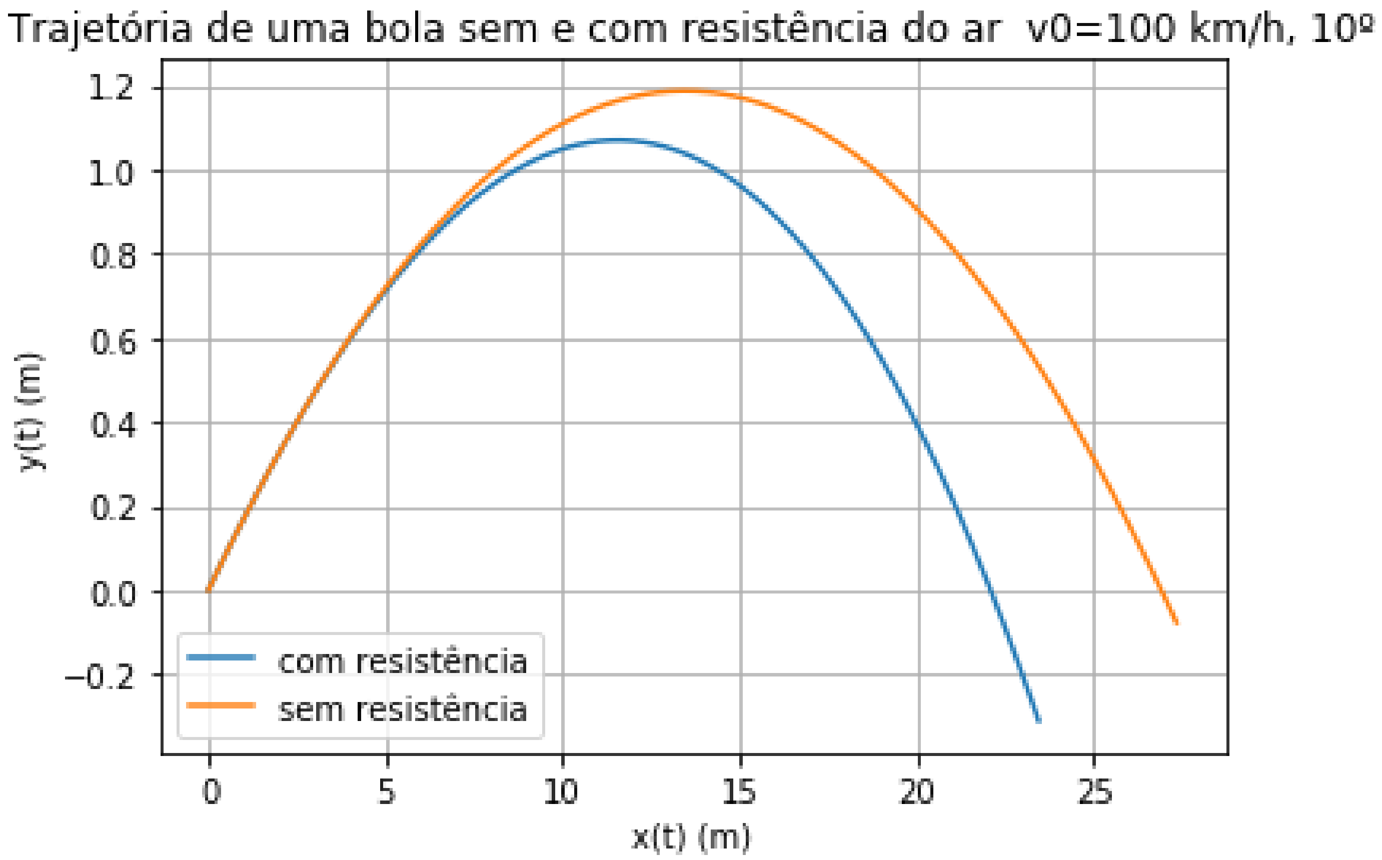
Trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar

$$\begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

1º Cálculo da velocidade por integração com o método de Euler

2º Cálculo da posição velocidade por integração com o método de Euler

```
D = g/vt**2
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)
   ax[i]=-D*vv*vx[i]
   ay[i]=-g-D*vv*vy[i]
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
   y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

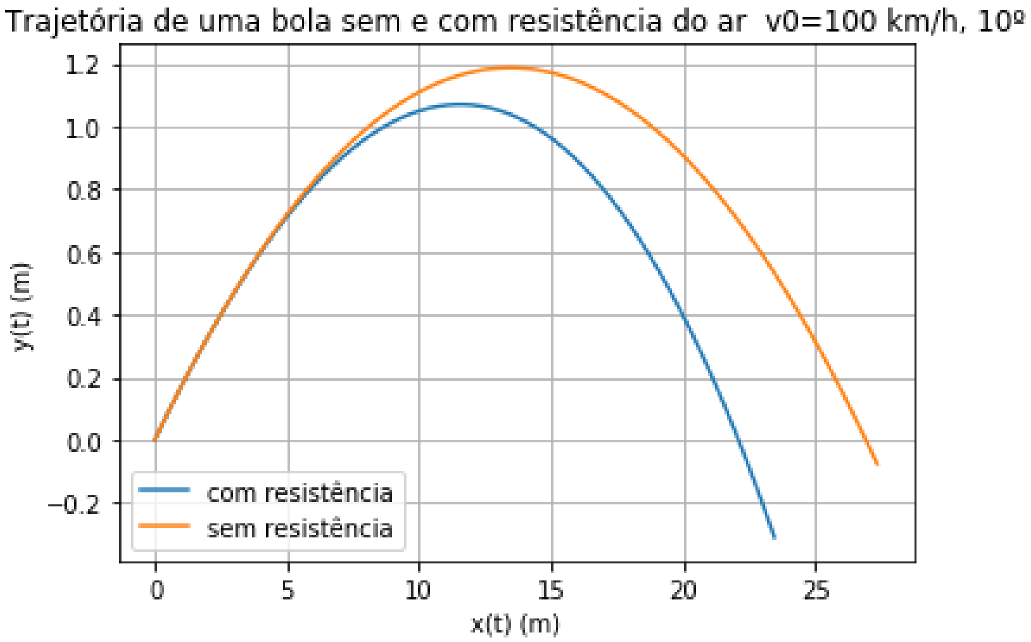


EX:

$v_0 = 100$ km/h $\qquad v_T = 100$ km/h.

$\theta_0 = 10°$

Trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar



Perguntas:

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)?

quando $\frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0$

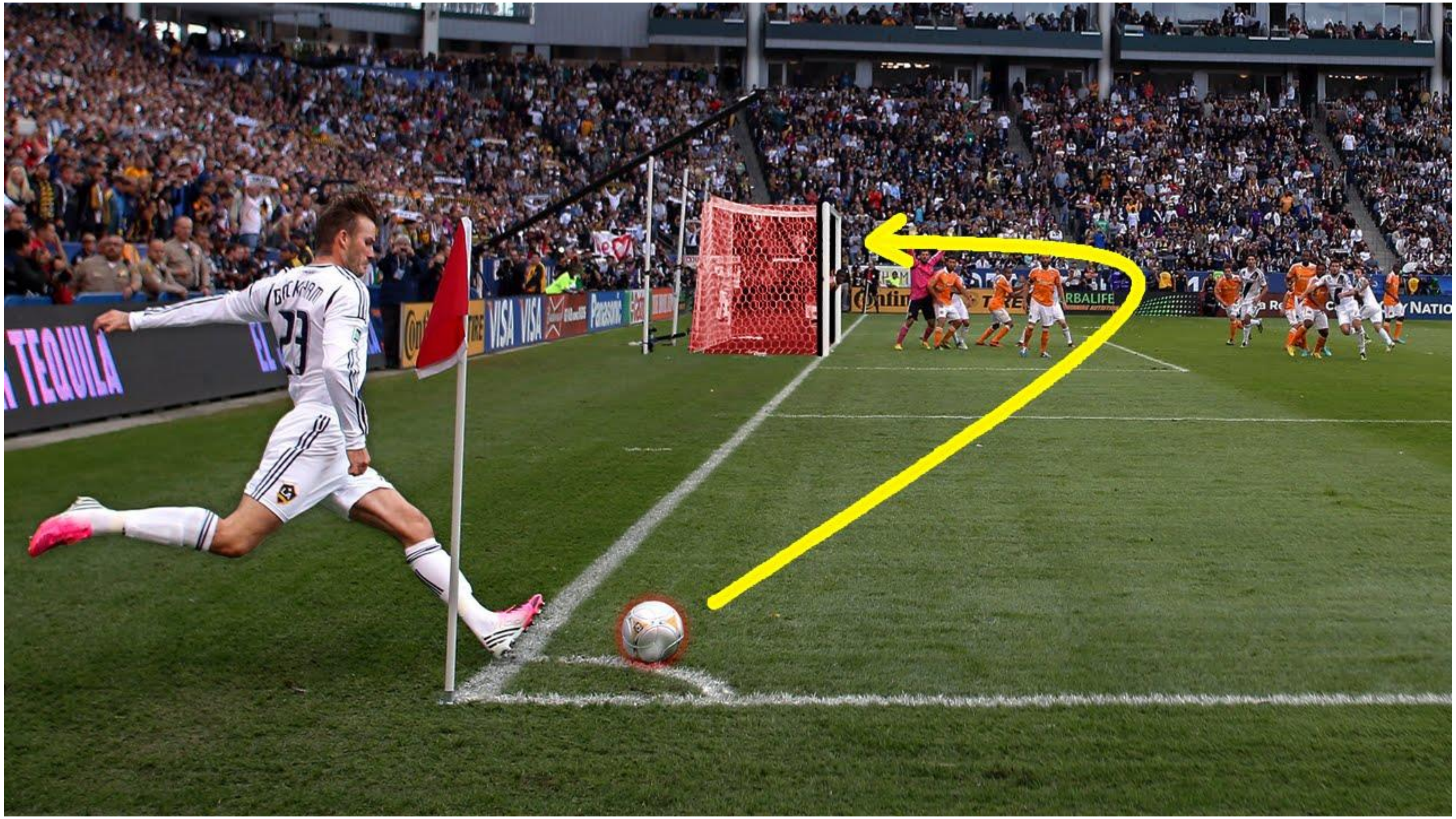
ou, $\frac{dy(x)}{dx} = 0$

2. Qual o alcance máximo (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo}?

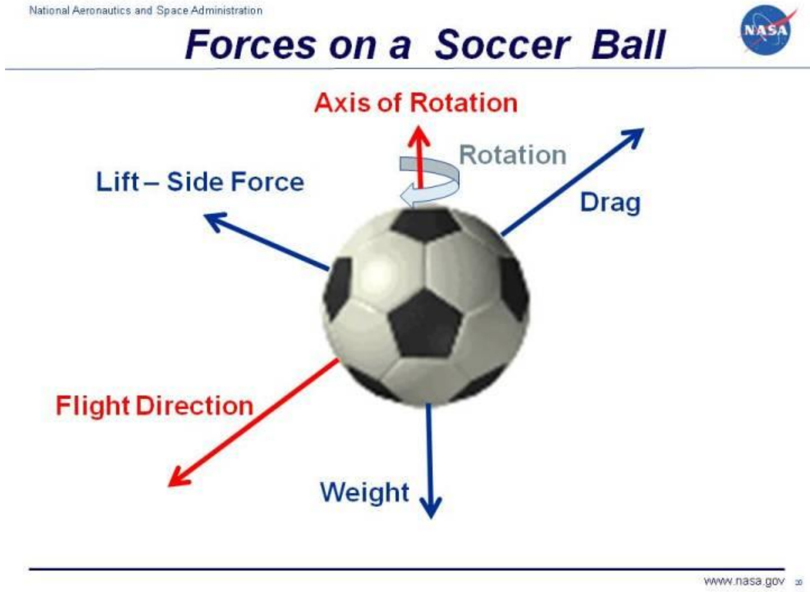
quando y=0

Encontrar as soluções numericamente

Movimento a 3D



Trajetória de uma bola de futebol resistência do ar e rotação



Se soubermos as forças aplicadas à bola saberemos a lei do movimento.

1. Peso da bola

$$\vec{F}_{grav} = -mg\hat{\jmath}$$

2. Uma bola em movimento desloca o ar à sua passagem. Por isso sofre uma força de resistência do ar na forma

$$\vec{F}_{res} = -m\, D|\vec{v}|^2\hat{v}$$

3. A rotação da bola faz que o escoamento do ar seja diferente nos lados opostos da bola. O resultado é o aparecimento de uma força perpendicular ao eixo de rotação. É a força de Magnus, que tem a forma

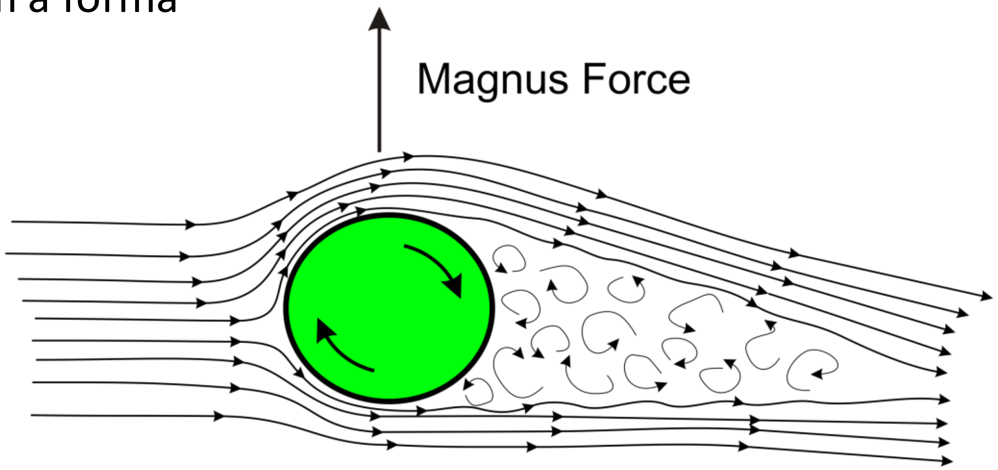
$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$\vec{\omega}$ é o vetor rotação, $|\vec{\omega}|$= ângulo (rad)/segundo

$A = \pi r^2$ a área da secção da bola

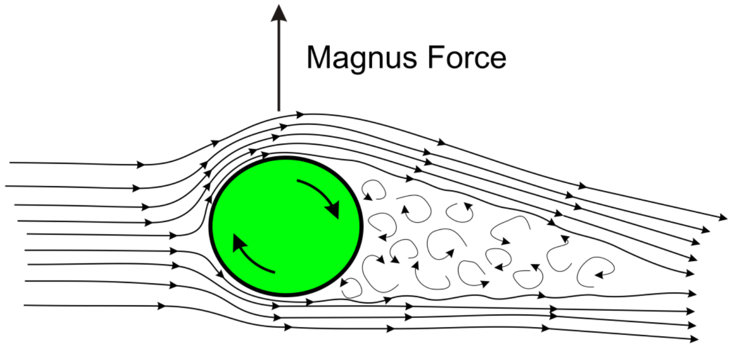
ρ_{ar} a densidade do ar

r o raio da bola



Problema: Bola de futebol com rotação

Determinar se é golo ou não, a bola ser chutada do canto com rotação. Implementar o movimento da bola com rotação, usando o método de Euler. Modificar um programa anterior que seja semelhante e adicionar a parte do método de Euler correspondente à dimensão extra z



Dados:

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 23.8m)$$
$$\vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right) = (25, 5, -50) \text{ m/s}$$
$$\vec{\omega} = \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right) = (0, 400 \text{ rad/s}, 0)$$
$$t_0 = 0\ s$$

Massa da bola $m = 0.45$ kg

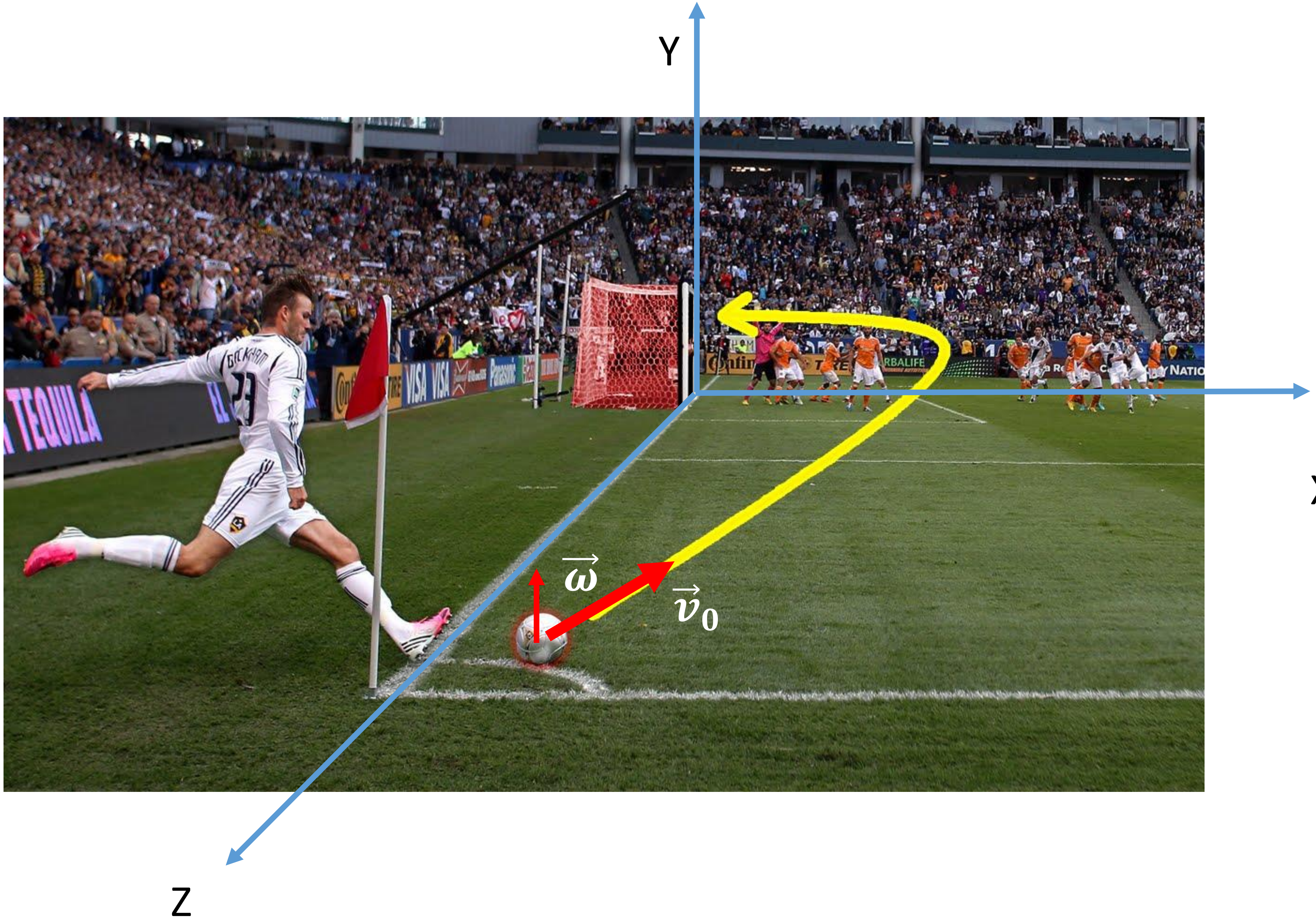
Raio da bola: $r = 11$ cm

Área transversal da bola: $A = \pi\, r^2$

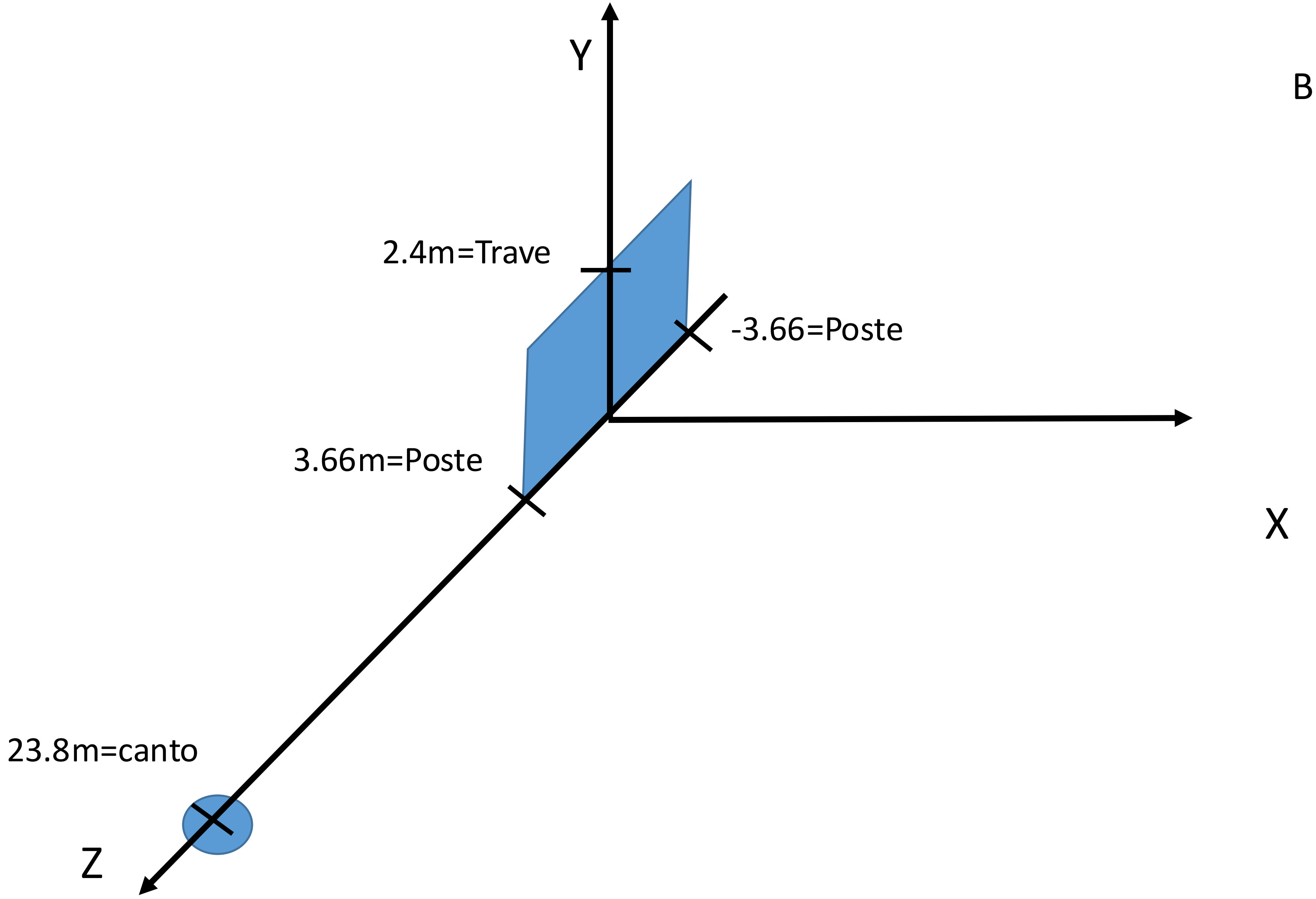
$\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$\vec{\omega} \times \vec{v} = (\omega_y v_z, 0, -\omega_y v_x)$ neste caso


Y
X
Z
$\vec{\omega}$
$\vec{v}_0$
TEQUILA
VISA VISA
23

Bola de futebol com rotação



Baliza:

$$x < 0$$

$$-3.66 < z < 3.66 \text{ m}$$

$$0 < y < 2.4 \text{ m}$$

Bola de futebol com rotação

Descrição em termos de componentes *x*, *y* e *z*:

As projeções das forças de **peso** e **resistência do ar** são:

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} F_{res,x} = -m\, D|\vec{v}|v_x \\ F_{res,y} = -m\, D|\vec{v}|v_y \\ F_{res,z} = -m\, D|\vec{v}|v_z \end{cases}$$

O vetor velocidade angular $\vec{\omega} = (0, \omega_y, 0)$ rad/s, faz que a **força de Magnus** seja

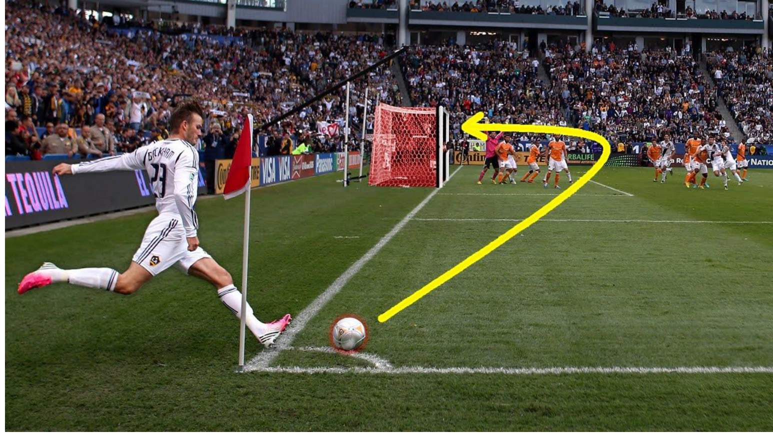
$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & \omega_y & 0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \left(\omega_y v_z\, \hat{\imath} - \omega_y v_x \hat{k}\, \right)$$

e assim as componentes da força de Magnus são:

$$\begin{cases} F_{Magnus,x} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r \omega_y v_z \\ F_{Magnus,y} = 0 \\ F_{Magnus,z} = -\frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r \omega_y v_x \end{cases}$$

Bola de futebol com rotação



$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \\ P_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{res,x} = -m\, D|\vec{v}|v_x \\ F_{res,y} = -m\, D|\vec{v}|v_y \\ F_{res,z} = -m\, D|\vec{v}|v_z \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{Magnus,x} = \frac{1}{2}A\, \rho_{ar}\, r\omega_y v_z \\ F_{Magnus,y} = 0 \\ F_{Magnus,z} = -\frac{1}{2}A\, \rho_{ar}\, r\omega_y v_x \end{cases}$$

Ao combinar todas estas forças e dividi-las pela massa, temos

$$\begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x + \frac{1}{2}A\, \rho_{ar}\, r\omega_y v_z/m \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \\ a_z = -D|\vec{v}|v_z - \frac{1}{2}A\, \rho_{ar}\, r\omega_y v_x/m \end{cases}$$

Outra vez, a aceleração em cada direção depende do movimento nas outras

Resolvemos pelo método de Euler

Bola de futebol com rotação

Dados:

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,23.8m)$

$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = (25,5,-50)$ m/s

$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 400 \text{ rad/s}, 0)$

$t_0 = 0\ s$

Massa da bola = 0.45 kg

Velocidade terminal da bola =100 km/h

Raio da bola: $r = 11$ cm

Área transversal da bola: $A = \pi\, r^2$

$\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$

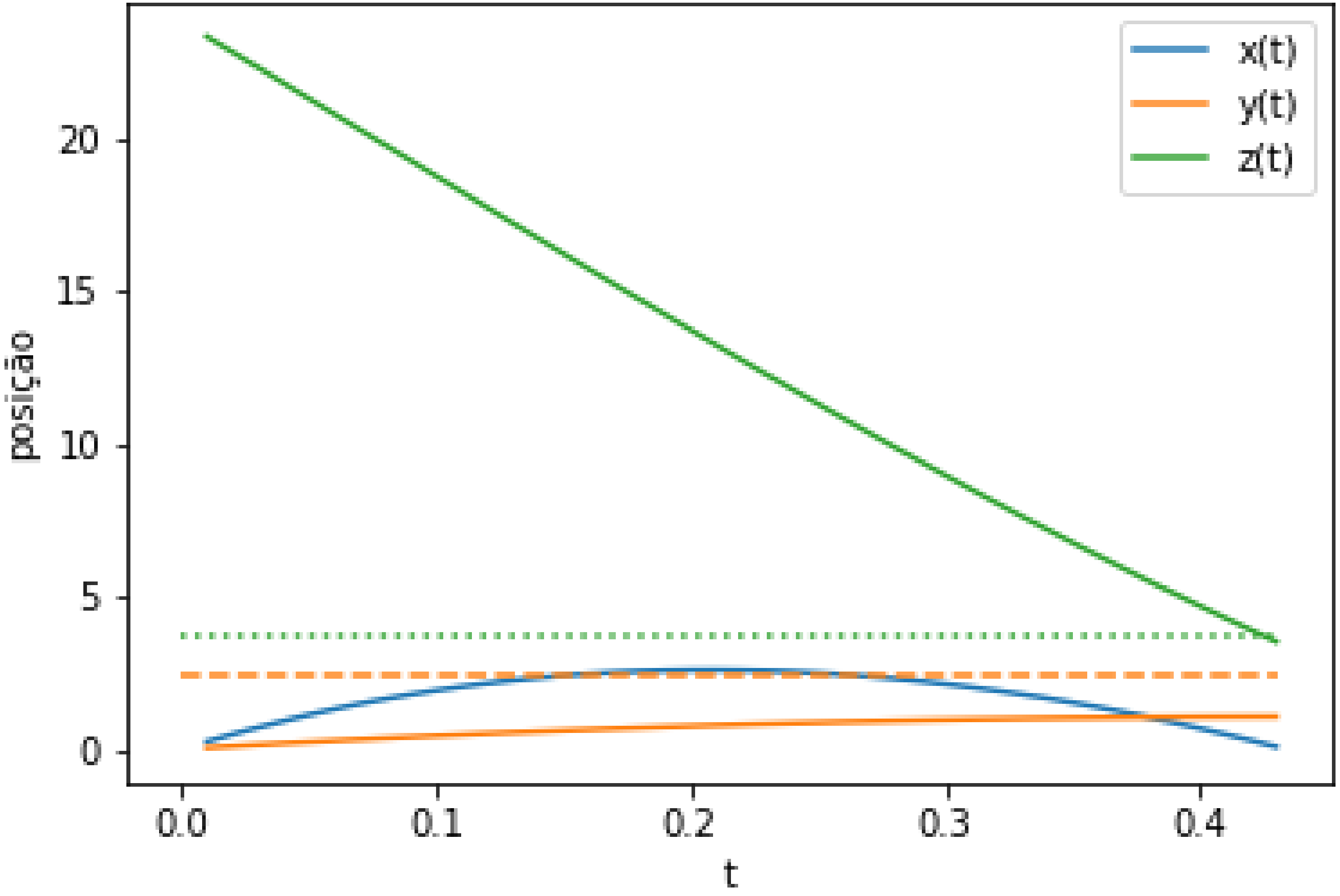
$$\begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x + \frac{1}{2}A\ \rho_{ar}\ r\omega_y v_z \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \\ a_z = -m\ D|\vec{v}|v_z - \frac{1}{2}A\ \ \rho_{ar}\ r\omega_y v_x \end{cases}$$

Solução:

```
dres=g/vt**2   #coeficiente para resistência do ar
mag=0.5*1.225*0.11*np.pi*0.11**2 #coeficiente força Magnus
omega_y = 400 #componente y da rotação

for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2+vy[i]**2+vz[i]**2) #|v|
    amx=mag*omega_y*vz[i]/m  #força de Magnus - x
    amz=-mag*omega_y*vx[i]/m #força de Magnus – z

    ax[i]=-dres*vv*vx[i]+amx
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    az[i]=-dres*vv*vz[i]+amz

    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    vz[i+1]=vz[i]+az[i]*dt

    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
    z[i+1]=z[i]+vz[i]*dt
```

Bola de futebol com rotação

Solução numérica



Baliza:

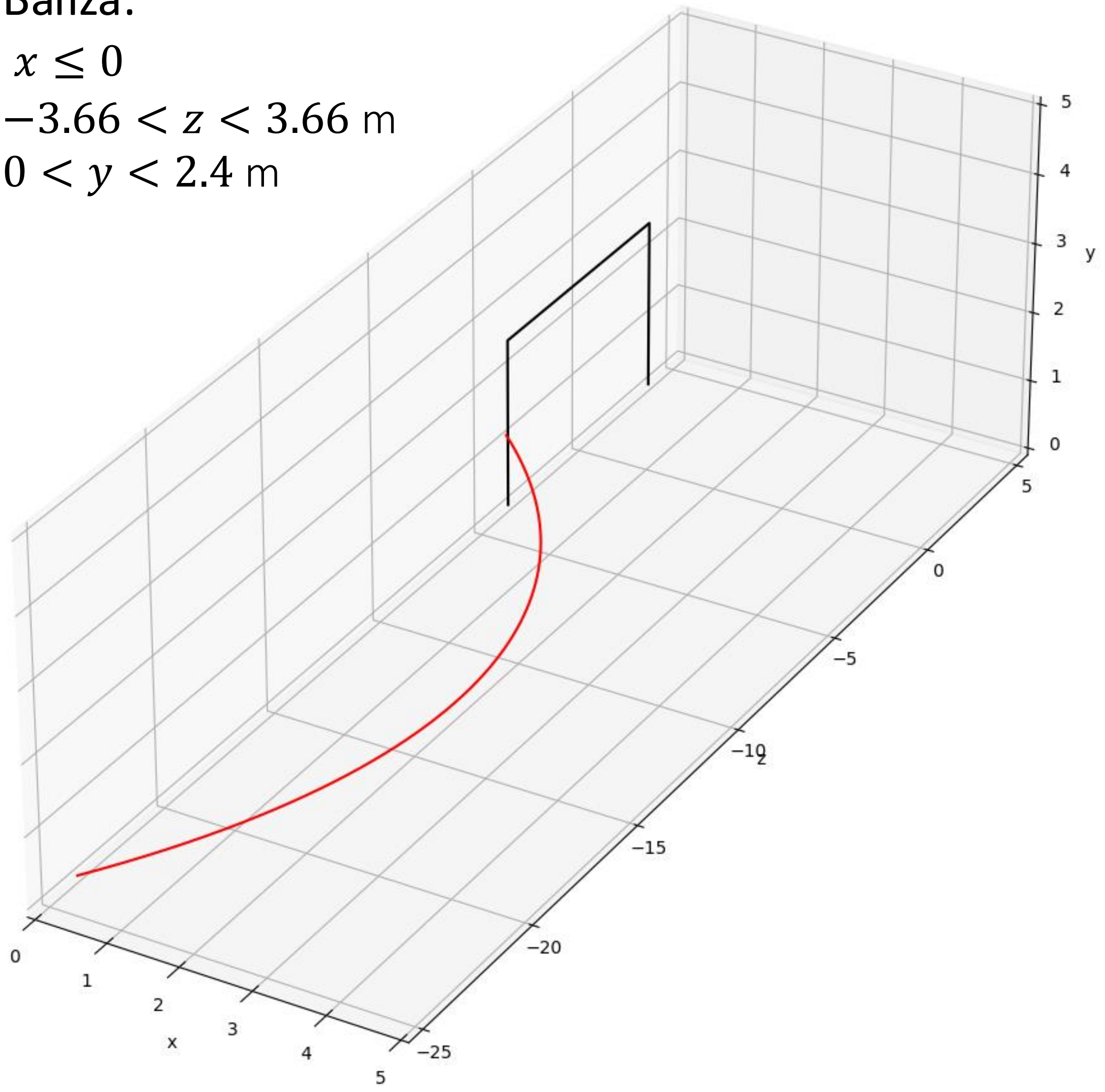
$$x < 0$$
$$-3.66 < z < 3.66 \text{ m}$$
$$0 < y < 2.4 \text{ m}$$

Baliza:

$x \leq 0$

$-3.66 < z < 3.66$ m

$0 < y < 2.4$ m

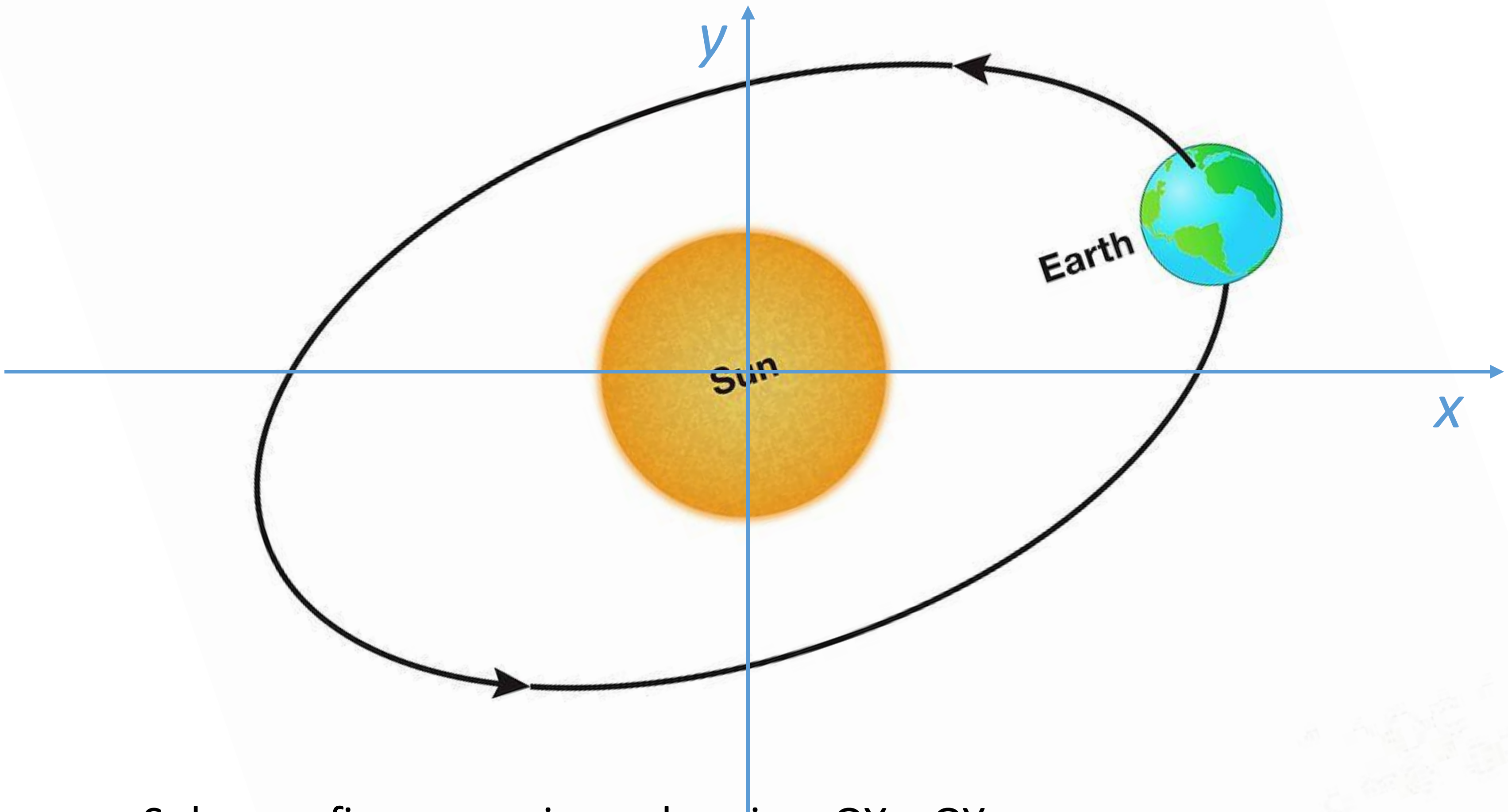


Código plot 3D:

```
plt.figure(figsize=(8,8))
ax = plt.axes(projection='3d’) #criar eixos 3D

#desenhar a baliza
goalx = [0,0,0,0]
goaly = [0,2.4,2.4,0]
goalz = [-3.66,-3.66,3.66,3.66]
ax.plot3D(goalx,goalz,goaly, ‘k’)

#trajetória da bola
ax.plot3D(x[x>=0],-z[x>=0],y[x>=0], 'r’)

#ajustar eixos
ax.set_xlim3d(0, 5)
ax.set_ylim3d(-25, 5)
ax.set_zlim3d(0, 5)
ax.set_box_aspect((2,6,2))
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('z')
ax.set_zlabel('y')
```

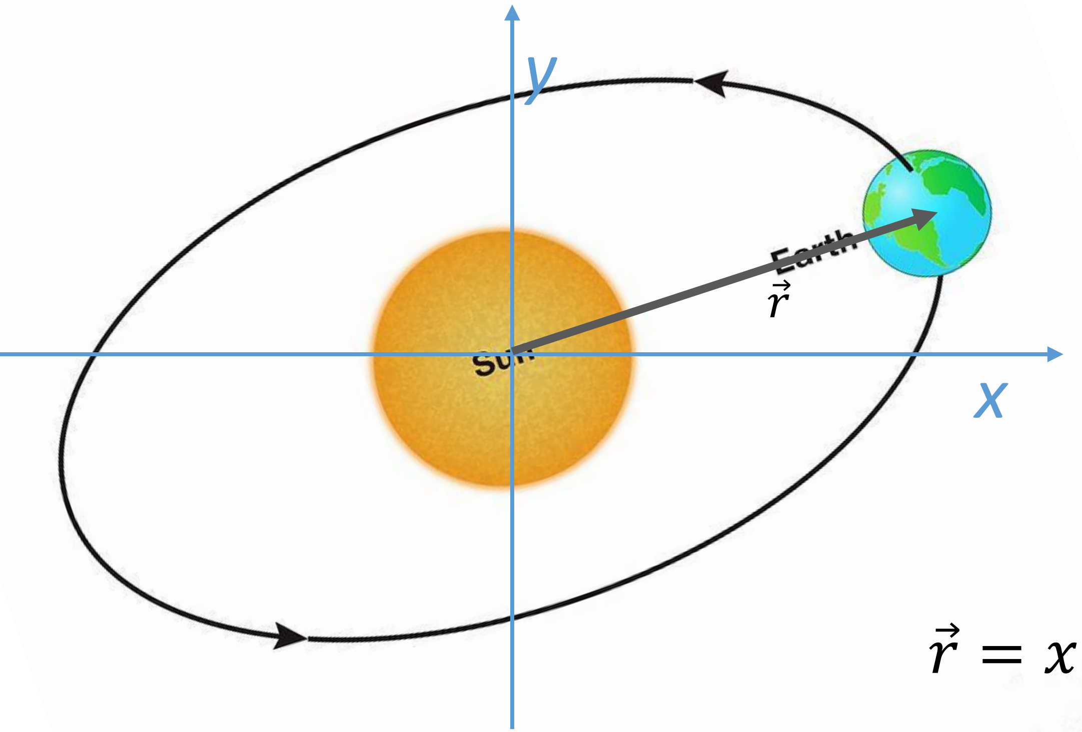
Teste 1 até aqui!

Sistema Terra-Sol



Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY

Sistema Terra-Sol



$\vec{r}$ é o vetor com origem no Sol e termina na Terra

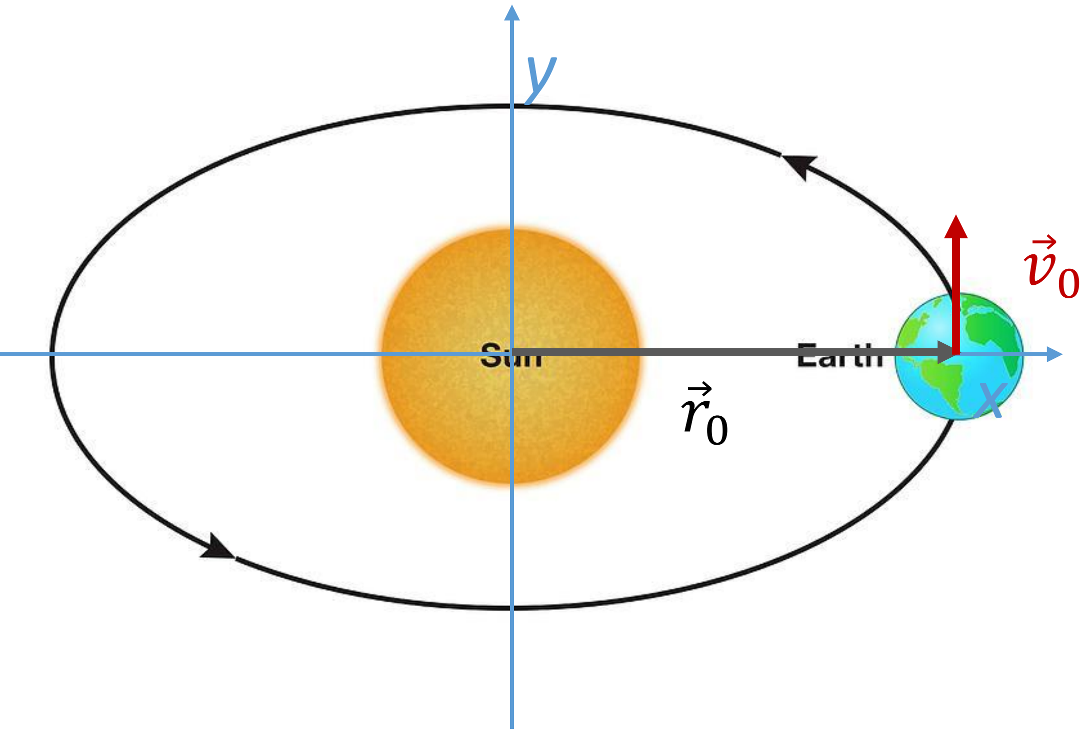
Força de gravidade (do sol na terra)

$$\vec{F}_{grav} = -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\,\hat{r} \quad = -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{F}_{grav} = -\,G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\,(\,x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}) = (-G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\,x, -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\,y\,)$$

Sistema Terra-Sol



Condições iniciais

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (distancia\ ao\ sol, 0)$$

$$\vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}\right) = \left(0,\ 2\frac{pi}{ano} * distancia\ ao\ sol\right)$$

Sistema Astronómico de Unidades

Grandeza	*Unidade*	*Definição*	*Valor no SI*
Distância	AU	Distância média da Terra ao Sol	$1.498 \times 10^{11} m$ (~150 milhões de km)
Tempo	ano	Período da Terra em volta do Sol	$3.15 \times 10^{7} s$
Massa	M	Massa do Sol	$1.989 \times 10^{30} kg$

Neste sistema, a constante de gravitação é $G = 6.67408 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} = 4\pi^2 \frac{AU^3}{M\, ano^2}$

a massa da Terra é $m = 5.9722 \times 10^{24} kg = 3.003 \times 10^{-6} M$

Condições iniciais neste sistema de unidades

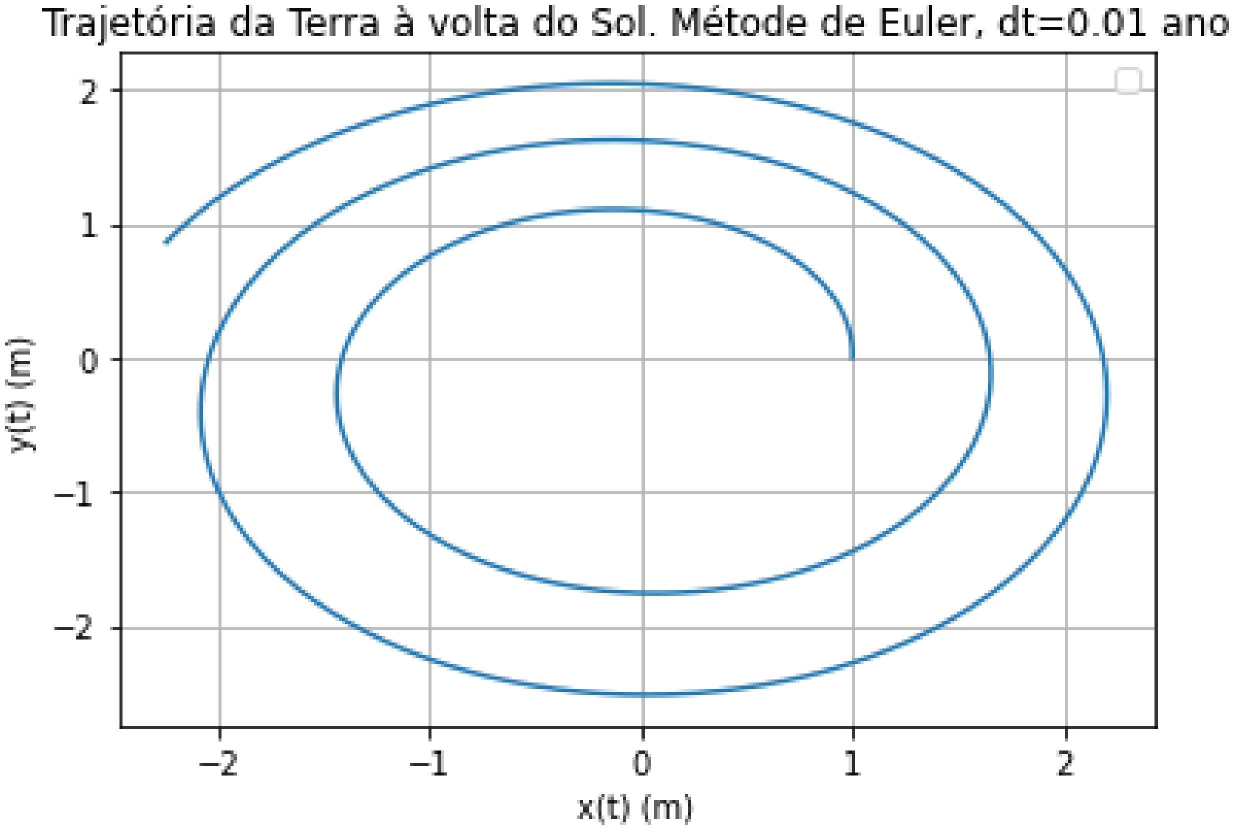
$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (1,0) \text{ AU}$$
$$\vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}\right) = (0,2\pi) \text{ AU/ano}$$

tornam-se muito mais simples.

Sistema Terra-Sol

$$\vec{F}_{grav} = (-G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}x, -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}y\,)$$

$$a_x = -\frac{GM}{|\vec{r}|^3}x\,, \qquad a_y = -\frac{GM}{|\vec{r}|^3}y$$



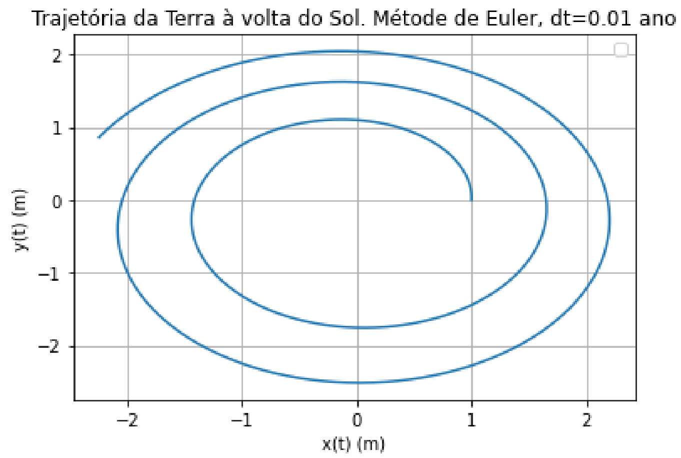
Integração pelo método de Euler

```
gm = 4*np.pi**2

x0 = 1
y0 = 0
vx0 = 0
vy0 = 2*np.pi
.
.
.
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

Método de Euler

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\ (t) \times \delta t$$
$$v_x(t+\delta t) \approx x(t) + a_x\ (t) \times \delta t$$

Não funcionou muito bem para este problema.
Precisamos de um alternativo



Método de Euler-Cromer **(ou Euler modificado)**

$$v_x(t+\delta t)\ \approx x(t) + a_x\ (t) \times \delta t$$
$$\boldsymbol{x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x(t+\delta t) \times \delta t}$$

usar o novo valor da velocidade para calcular a nova posição

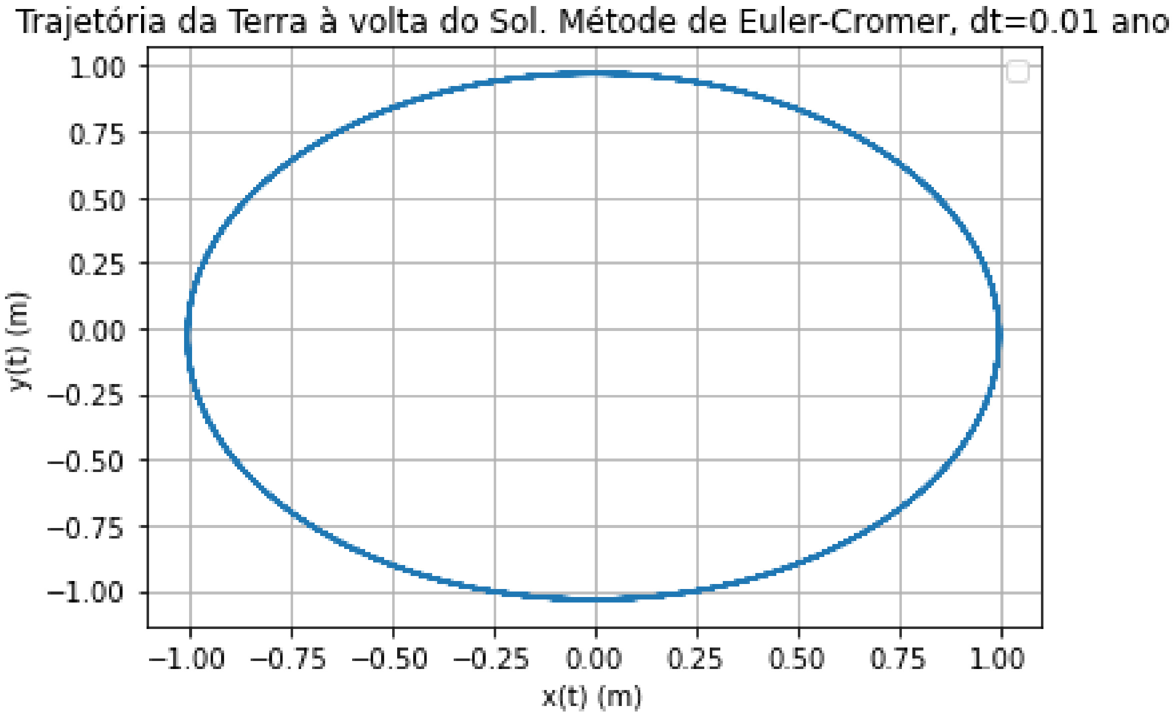
Sistema Terra-Sol

$$\vec{F}_{grav} = \left(-G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}x, -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}y\right)$$

Integração pelo método de Euler-Cromer

.
.
.

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt
```



Produz órbitas fechadas!

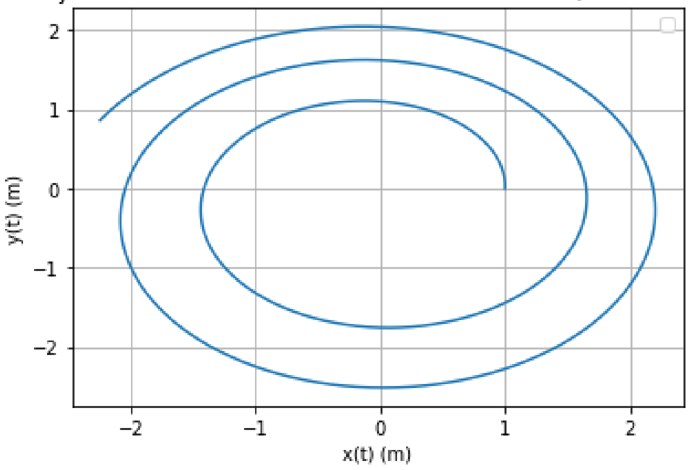
Métodos de Integração

Método de Euler

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t) \times \delta t$$

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt x
```

Trajetória da Terra à volta do Sol. Método de Euler, dt=0.01 ano

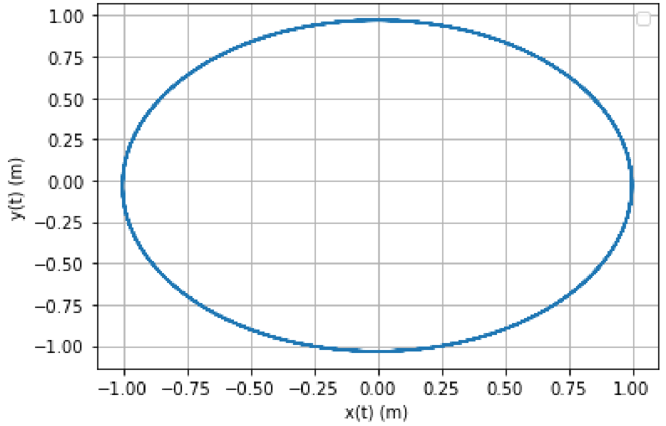


Método de Euler-Cromer

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t+\delta t) \times \delta t$$

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt x
```

Trajetória da Terra à volta do Sol. Método de Euler-Cromer, dt=0.01 ano



O método de <u>Euler-Cromer</u> :
- Mesmo erro de truncatura que o método de Euler
- Mas para movimentos periódicos, o erro anula-se ao fim de um período
- Conserve melhor a energia

Método de Euler mediocre para movimentos periódicos.