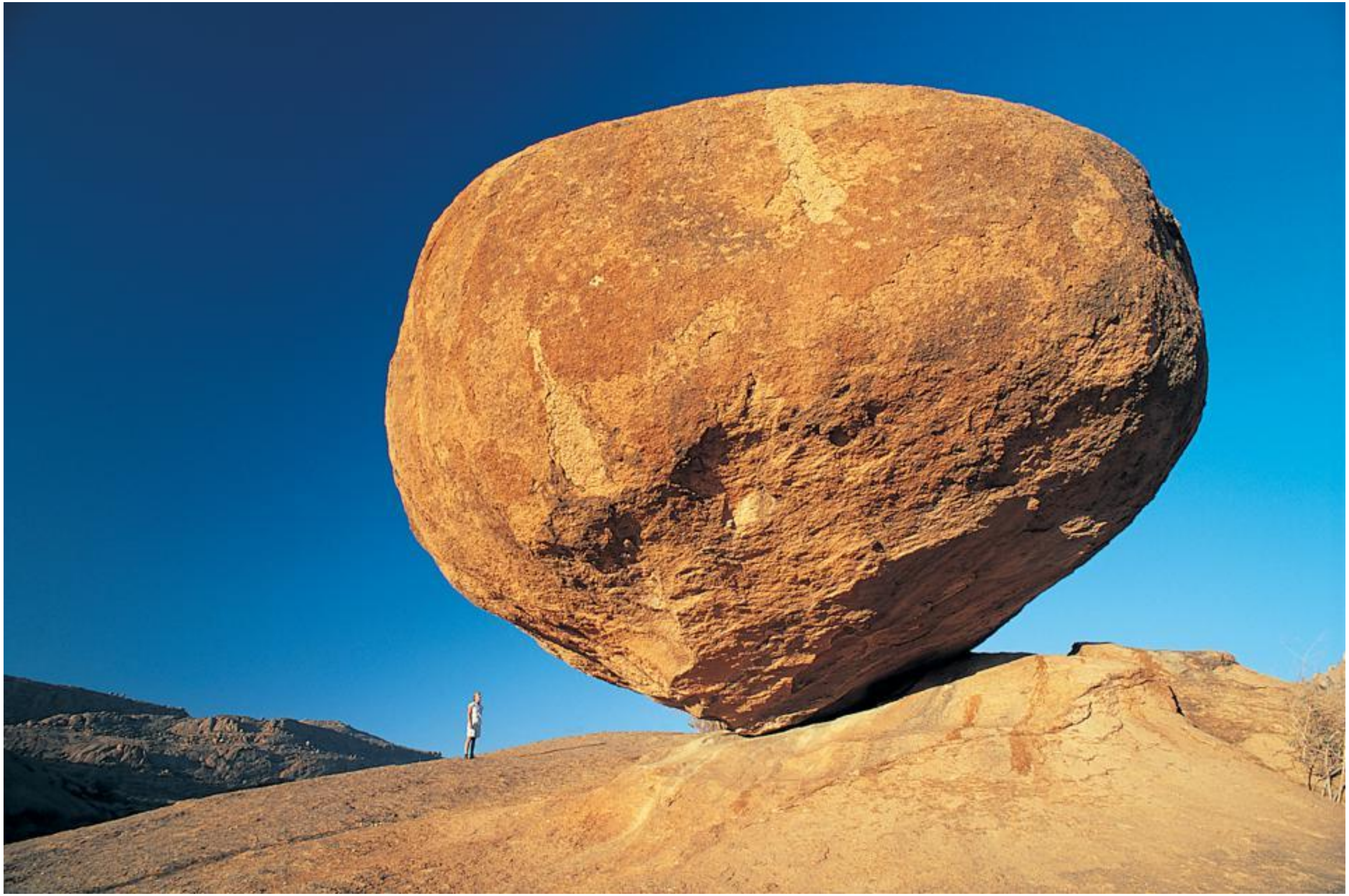
Departamento de Física
Universidade de Aveiro

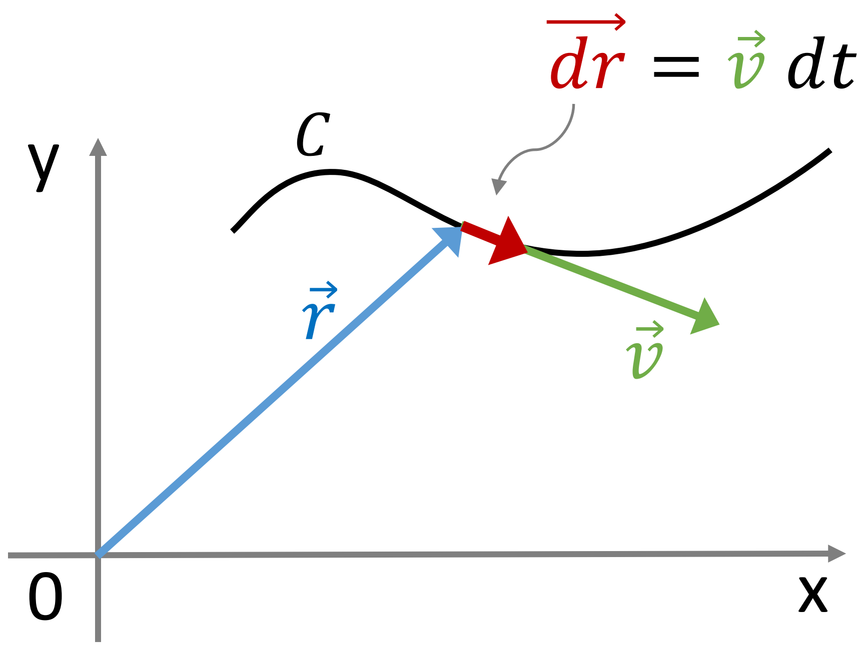
Modelação de Sistemas Físicos

Capítulo 4: Leis de Conservação

Bibliografia:

Serway, cap. 7, 8 e 9;
Sørenssen, cap. 10, 11 e 12;
Villate, cap. 6





2ª Lei de Newton:

$$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t)$$

Equivalante à **forma integral**

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_C m\,\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

(integral de caminho)

$d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$ ao longo da trajetória C.

A 1D: $$\int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = \int_{x_0}^{x_1} m\,a_x\,dx$$

se a força depende só da posição, esta formulação permite determinar **a relação da velocidade com a posição**, mesmo sem sabermos as relações temporais

Teorema Trabalho – Energia

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C m\, \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Agora $$\int_C m\, \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} m\, \vec{a}(t) \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m \left(\frac{d\, v_x}{dt}\, v_x + \frac{d\, v_y}{dt}\, v_y + \frac{d\, v_z}{dt}\, v_z \right) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} [v_x(t)^2] + \frac{d}{dt} [v_y(t)^2] + \frac{d}{dt} [v_z(t)^2] \right\} dt$$

$$= \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

$$\frac{d}{dt} [v_x(t)^2] = 2 \frac{d\, v_x(t)}{dt}\, v_x(\mathrm{t})$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

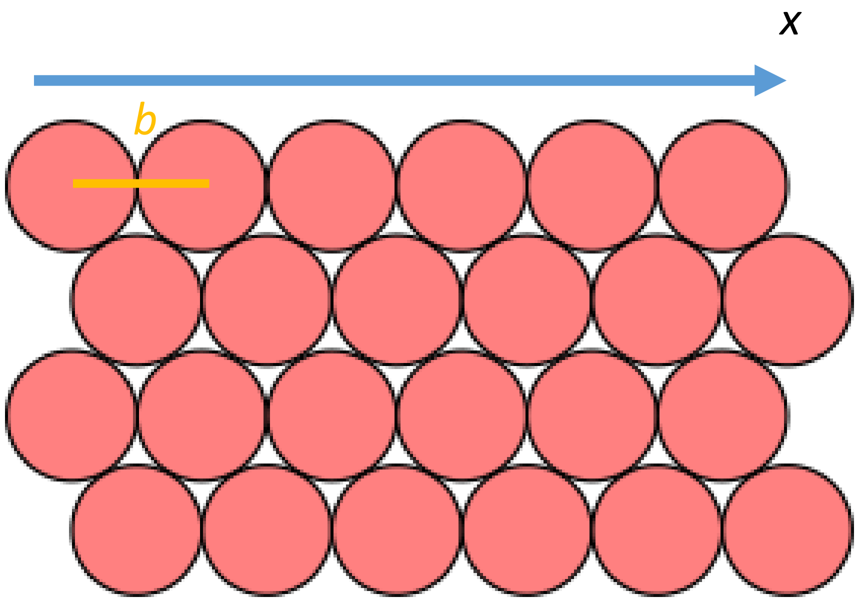
Diferença de energia cinetica

Trabalho

Exemplo: Movimento de um a partícula sobre a superfície de um cristal (1D)

Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal.
O cristal exerce a força

$$F_x = -F_0 \sin\frac{2\pi x}{b}$$



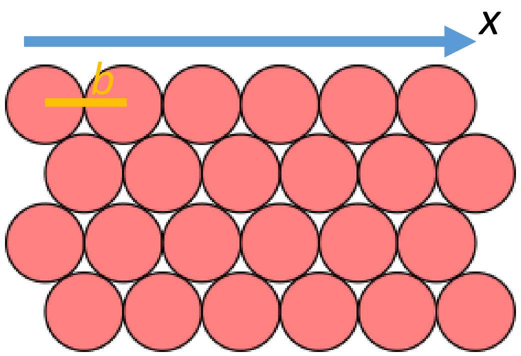
x é a posição do átomo e b a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal.

Se o átomo partir da posição x_0 com velocidade v_{0x}, qual a dependência da velocidade em função da posição?

A 1D:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x \, dx = \frac{1}{2} m \, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m \, |\vec{v}_0|^2$$

Exemplo: Movimento de um a partícula sobre a superfície de um cristal (1D)



$$F_x = -\,F_0 \sin\frac{2\pi x}{b}$$

Posição inicial: x_0

Velocidade inicial: v_{0x}

Como depende a velocidade em função da posição?

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x\, dx = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

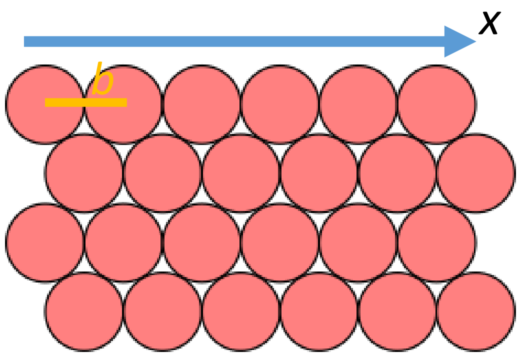
$$\int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx = \int_{x_1}^{x_2} -\,F_0 \sin\frac{2\pi x}{b}\; dx = -\,F_0 \frac{b}{2\pi}\left(-\cos\frac{2\pi x}{b}\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} = \frac{b\,F_0}{2\pi}\left[\cos\frac{2\pi x_1}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right]$$

$$\frac{b\,F_0}{2\pi}\left[\cos\frac{2\pi x_1}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right] = \frac{1}{2} m\, v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2$$

$$v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\, m}\left[\cos\frac{2\pi x_1}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right],$$

x_1 é uma posição qualquer

Exemplo: Movimento de um a partícula sobre a superfície de um cristal (1D)



$$v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\,m}\left[\cos\frac{2\pi x_1}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right],$$

x_1 é uma posição qualquer

$x_0 = 0,$

$$v_x = \pm\sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\,m}\left[\cos\frac{2\pi x}{b} - 1\right]}$$

+ sentido positivo do eixo OX

- sentido negativo do eixo OX

obtemos a velocidade em função da posição

sem ter de determinar a dependência do tempo!

Teorema Trabalho – Energia

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $=$ **Trabalho** $=\ W_{0,1}$ a partir da posição C_0 até à posição C_1.

$\frac{1}{2} m\, |\vec{v}|^2 =$ **Energia Cinética** $=\ E_c$ a unidade é joule (J), J=kg $\cdot\, \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

$$W_{0,1} = E_{c,1} - E_{c,0}$$

Trabalho feito no sistema é igual à energia cinetica adicionada

Se soubermos $|\vec{v}_0|$ e o trabalho efetuado $W_{0,1}$, obtemos $|\vec{v}_1|$

Nota: independente de C, a forma do caminho!

Teorema Trabalho – Energia

Sobreposição do trabalho

$\vec{F}$ é a força resultante de todas as forças aplicadas $\vec{F}_i$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum\nolimits_i \int_C \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum\nolimits_i W_i$$

$$W_i = \int_C \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

O trabalho feito é a soma do trabalho feito por cada força

Teorema Trabalho – Energia

Muitas forças relevantes dependem da posição (e outras constantes):

- Gravítica Peso: $\vec{P} = m\,\vec{g}$
- Gravítica Geral: $\vec{F}_{grav} = -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Elástica: $\vec{F} = -k\vec{r}$
- Elétrica: $\vec{F}_{elet} = -k\,\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Elétrica num campo: $\vec{F}_{elet} = q\vec{E}_{elet}$

Forças que não dependem da posição:

- Resistência do ar: $\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v}$
- Força de Magnus: $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega} \times \vec{v}$

Trabalho realizado por uma força constante $F_x = F$

Em 1D:

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_x \, dx = \int_{x_0}^{x_1} F \, dx = F\,(x_1 - x_0) = F\,\Delta x$$

$$= \begin{cases} + \text{ se força e deslocamento mesmo sentido (acelerar)} \\ - \text{ se força e deslocamento sentidos opostos (travar)} \end{cases}$$

Ex: <u>Peso</u> $F_y = -mg$ (eixo OY positivo a apontar para cima)

$$W_{0,1} = -m\,g\,(y_1 - y_0) = m\,g\,(y_0 - y_1) = \begin{cases} + \quad y_0 > y_1 \ \text{ desceu} \\ - \quad y_0 < y_1 \ \text{ subiu} \end{cases}$$

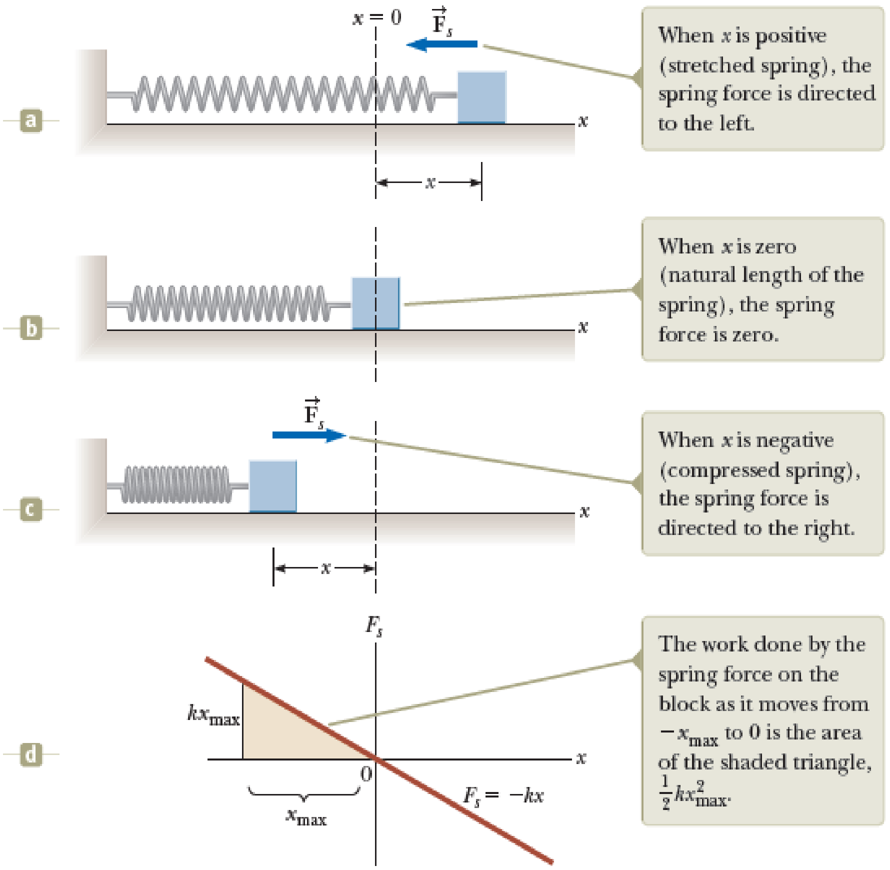
Trabalho realizado por uma força elástica

$$\vec{F} = -k\,\vec{r}$$

Em 1D
$$F_x = -k\,x$$

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = \int_{x_0}^{x_1} -k\,x\;dx = -\frac{1}{2}k\,(x^2)\Big|_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{1}{2}k({x_0}^2 - {x_1}^2)$$



Forças conservativas

Trabalho realizado por uma força constante $F_y = -mg$ $W_{0,1} = m\,g\,y_0 - m\,g y_1$

Trabalho realizado por uma força elástica $F_x = -k\,x$ $W_{0,1} = \frac{1}{2} k\, {x_0}^2 - \frac{1}{2} k\, {x_1}^2$

Só dependem da posição inicial e a posição final!

São exemplos de **forças conservativas** (não há dissipação de energia)

O trabalho pode ser escrito como uma diferença de **energias *potenciais*** que são funções de posição:

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$$

Forças conservativas

Ex:

Força constante $F_y = -mg$ $\qquad E_p = m\,g\,y$ ou $E_p = m\,g\,y + Constante$

Força elástica $F_x = -k\,x$ $\qquad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$ ou $E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 + Constante$

Esta <u>constante é à nossa escolha</u>!

Relação da força com energia potencial:

1D:

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = E_{p0} - E_{p1}$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$ (forças conservativas)

3D:

$$\vec{F} = -\nabla E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Para forças conservativas, existe sempre uma energia potencial em cada ponto no espaço (escalar), e a força é igual ao negativo da sua derivada em ordem à posição (vetor).

Conservação da Energia Mecânica

Teorema Trabalho – Energia $W_{0,1} = \frac{1}{2} m\, v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2 = E_{c1} - E_{c0}$

e

Por forças que dependem só da posição $W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$

então $E_{c1} - E_{c0} = E_{p0} - E_{p1}$

ou, $E_{c1} + E_{p1} = E_{c0} + E_{p0}$

Os pontos inicial (0) e final (1) são quaisquer

$$\Rightarrow\ E_c + E_p = \text{constante em todo o movimento}$$

Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$

E_p = outra forma de energia : Energia Potencial

Conservação da Energia Mecânica

Forças conservativas

$$E = E_c + E_p$$

Ex

Peso: $E = \frac{1}{2} m\, v_y^2 + mgy$

Elástica: $E = \frac{1}{2} m\, v_x^2 + \frac{1}{2} k\, x^2$

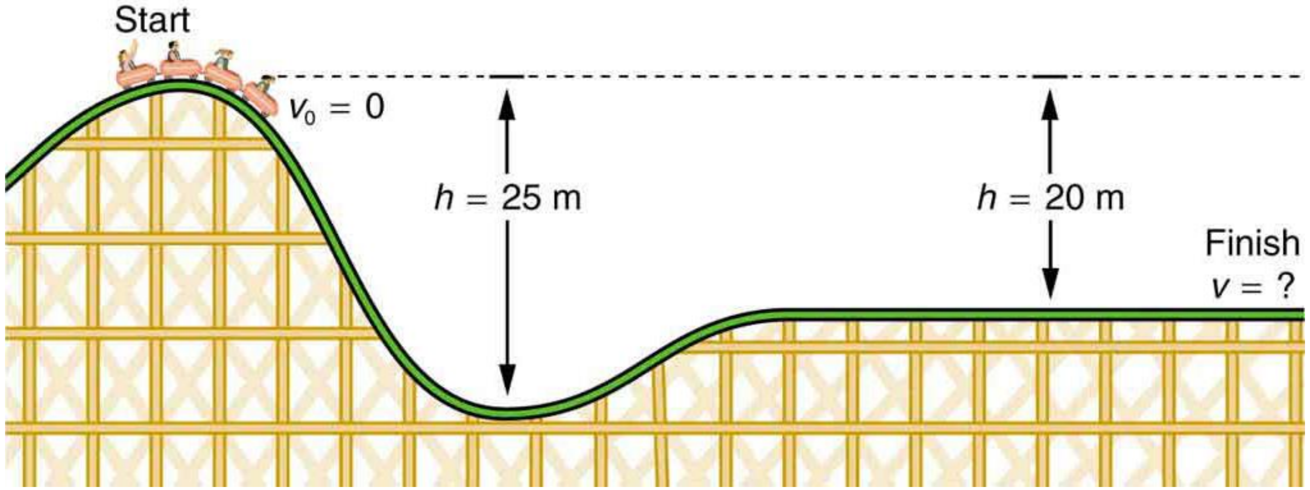
Temos sempre a velocidade num ponto como função da posição (se soubermos as condições iniciais ou equivalente)

Não é preciso resolver as equações do movimento. Desde que a força depende só da posição, a conservação da energia nos diz qual deve ser a energia cinética e então a velocidade em qualquer ponto.

Diagrama de Energia

Carruagem de massa m

$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$



1. Pontos de equilíbrio: $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$

   o mais baixo: ponto de equilíbrio estável

   cimo da montanha: ponto de equilíbrio instável (a mais pequena perturbação faz o corpo sair da posição de equilíbrio)

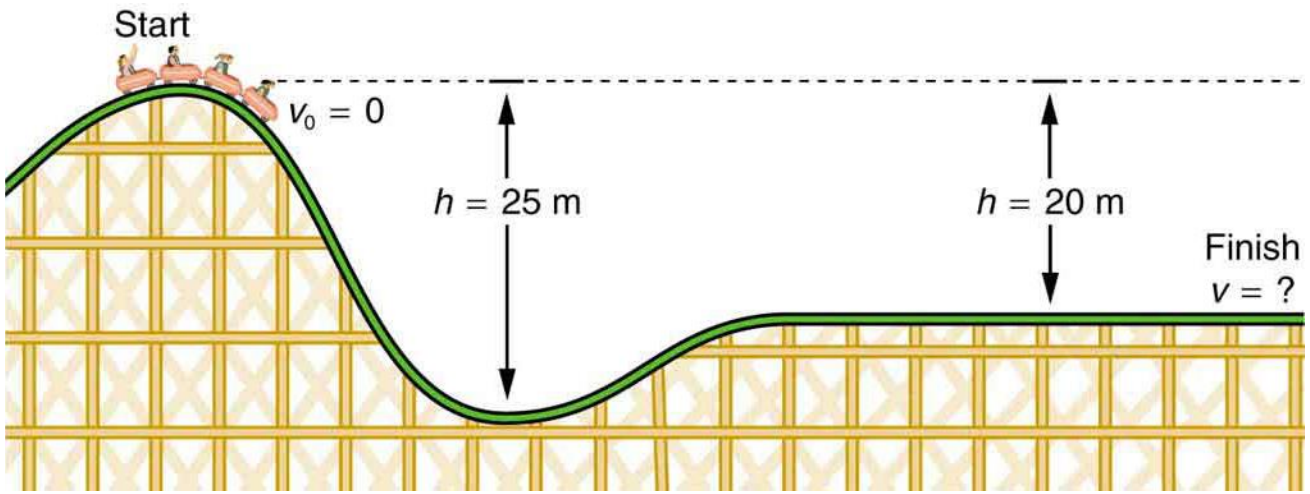
2. Energia Mecânica: Instante inicial $v_0 = 0$ e $y_0 = 25$ m (ponto mais baixo $y = 0$)

$$E = E_c + E_p = 0 + m\,g\,y_0$$

Diagrama de Energia

Carruagem de massa m

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$



2. Energia Mecânica : Instante inicial $v_0 = 0$ e $y_0 = 25$ m (ponto mais baixo $y = 0$)

$$E = E_c + E_p = 0 + m\, g\, y_0$$

Problema:

Se a carruagem com os passageiros tiver a massa de 1000 kg, qual a velocidade

a) No ponto mais baixo?

b) na zona plana?

Exemplo: Sistema Mola-Corpo

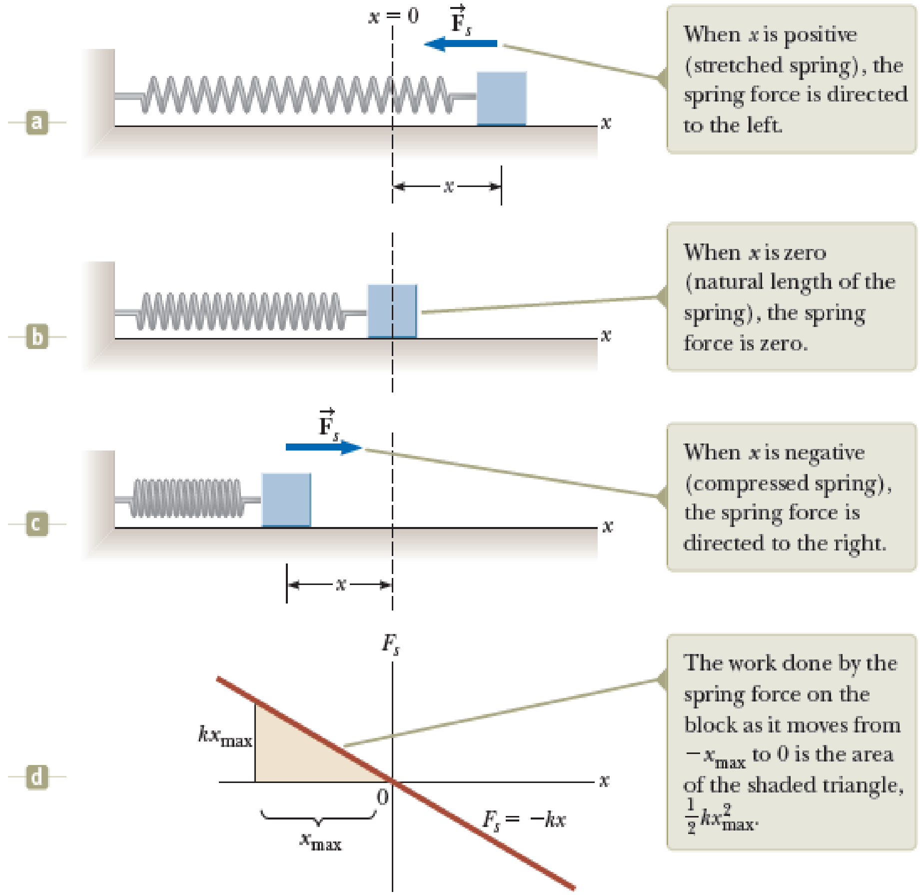
Uma mola exerce uma força $F_x = -k\ x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

Mola de constante elástica	k
Corpo de massa	m
Posição de equilíbrio	$x_{eq} = 0$

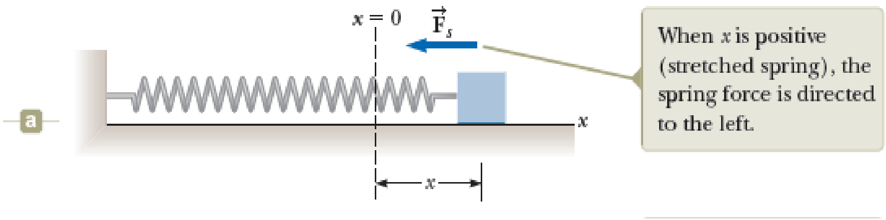
Problema

a) Calcule a energia total, do sistema com as condições iniciais: $x_0 = 4$ m e $v_{0x} = 0$.

b) Compare o cálculo de energia mecânica se integrar numericamente as equações $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$ e $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ para encontrar a lei do movimento, usando o método de **Euler** e o método de **Euler-Cromer**



Sistema mola-corpo



Força: $F_x = -k\,x$

Energia potencial: $E_p = \frac{1}{2} k\,x^2$

Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$

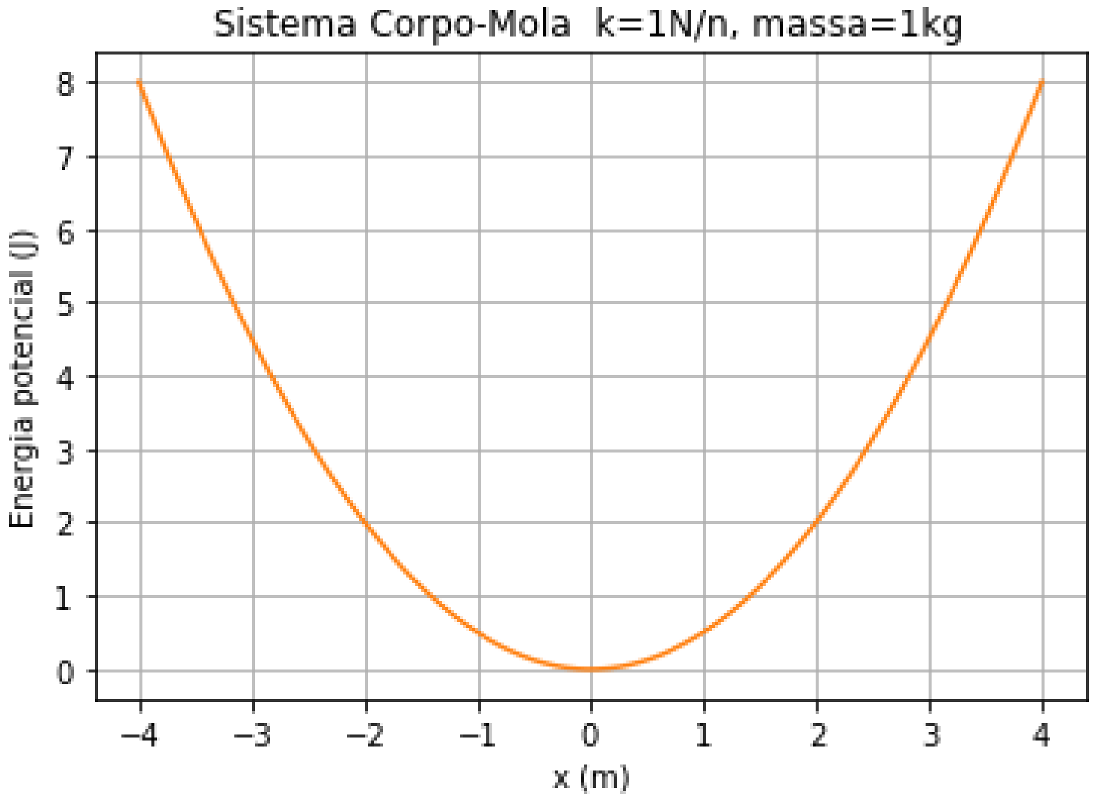
Neste caso: $E = \frac{1}{2} m\,v_x^2 + \frac{1}{2} k\,x^2$

a) Calcule a energia total, do sistema com as condições iniciais:

$k = 1$ N/m
$m = 1$ kg
$x_0 = 4$ m e $v_{0x} = 0$.

$\Rightarrow E = 0 + \frac{1}{2} 1\; 4^2$ J = 8 J

Diagrama de Energia



Se a energia total for $E = 8$ J, o corpo se desloca só entre $x = -4$ m e $x = 4$ m

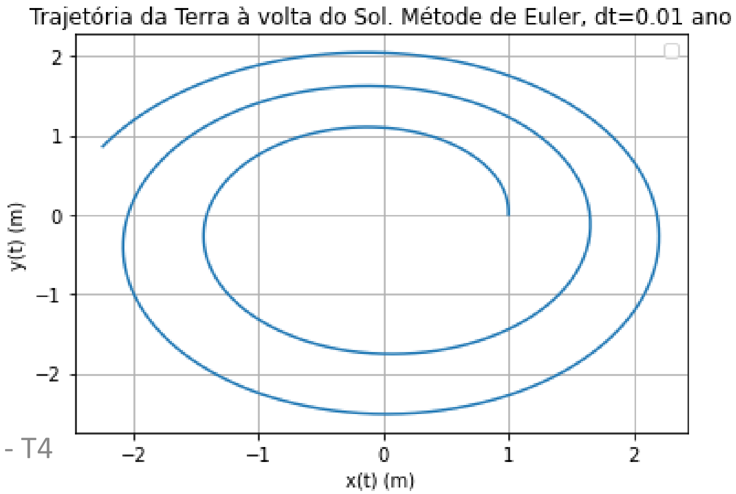
Pontos em que a E_p é plana, são pontos de equilíbrio,
pois $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$

Métodos de Integração

Integração pelo método de Euler

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt x
```

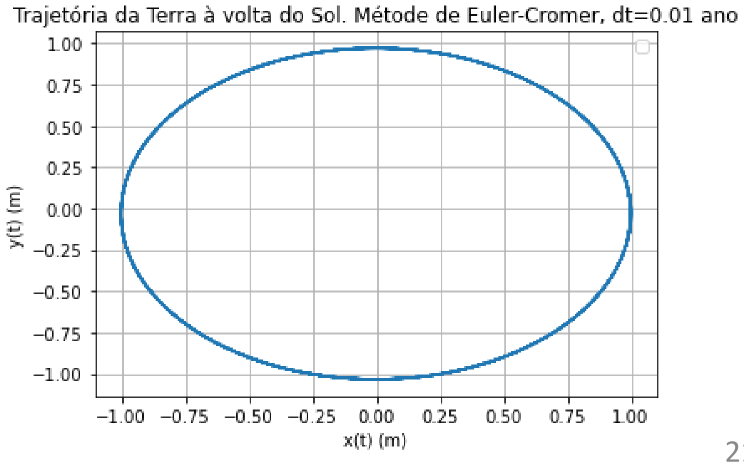
$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t) \times \delta t$$



Integração pelo método de Euler-Cromer

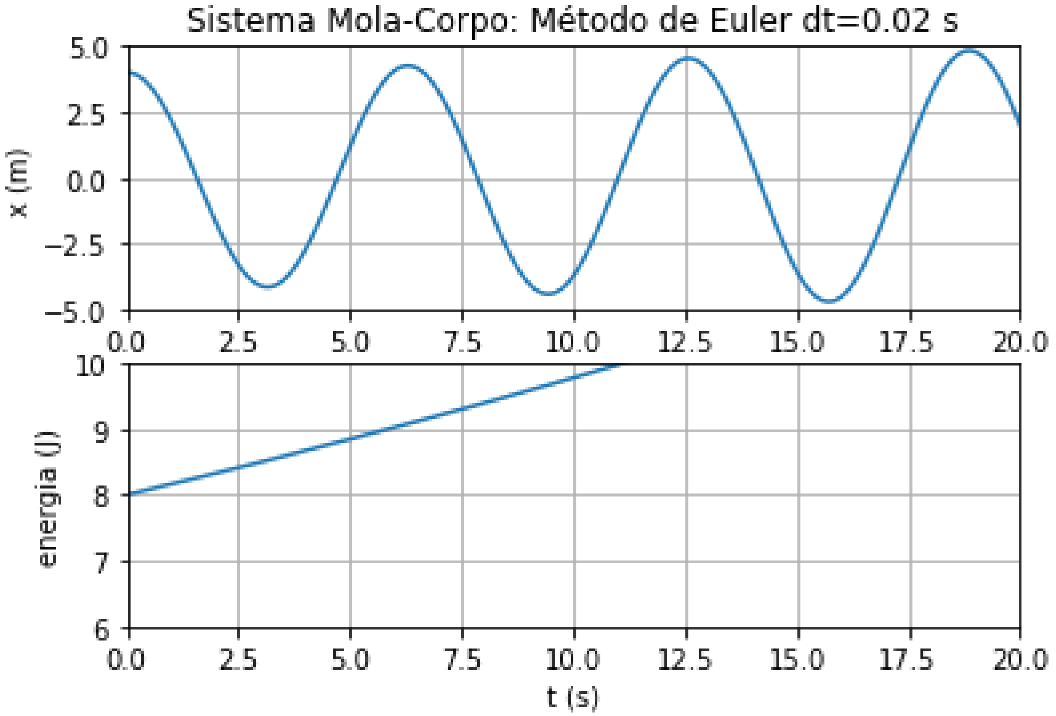
```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt x
```

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t+\delta t) \times \delta t$$

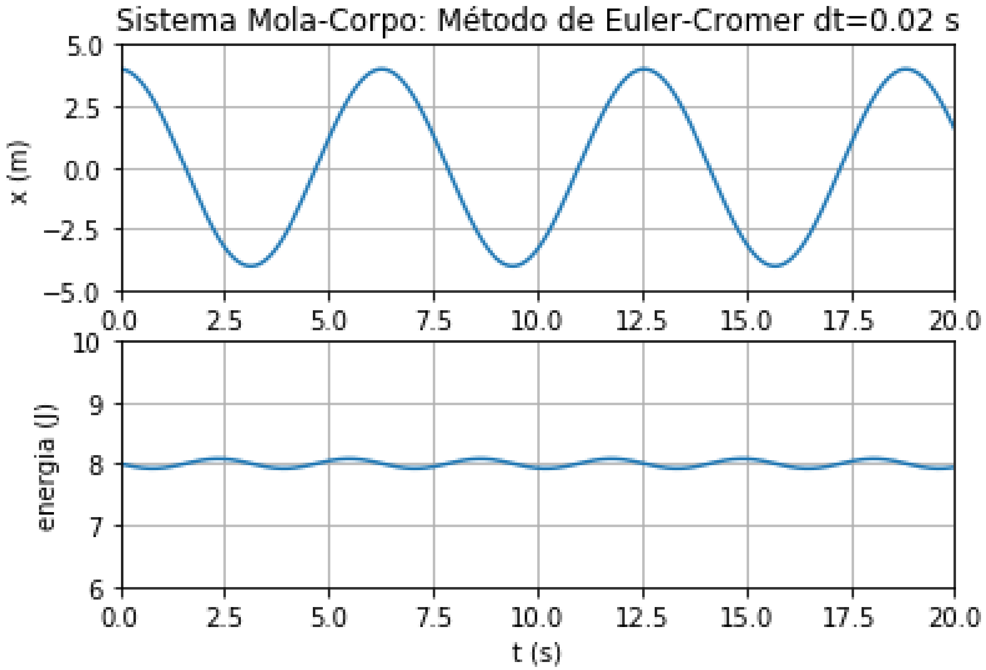


Sistema Mola-Corpo

b) Compare o cálculo de energia total se integrar numericamente as equações $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$ e $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ para encontrar a lei do movimento, usando o método de Euler e o método de Euler-Cromer



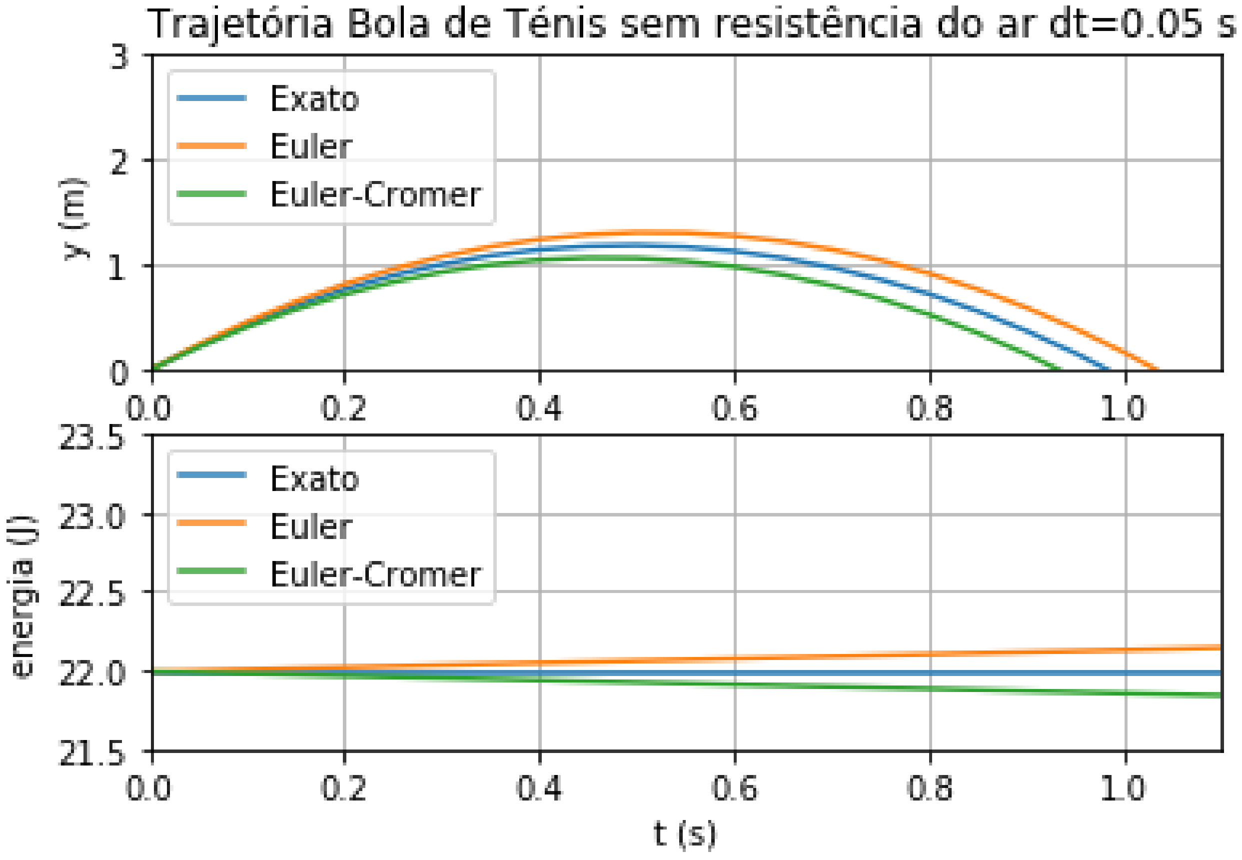
O método de Euler não conserva a energia mecânica



O método de Euler-Cromer conserva a energia mecânica

A **conservação da energia mecânica é um bom teste aos métodos de integração numérica.**
Recusam-se os métodos que não conservam a energia mecânica (para as forças conservativas)

Conservação de Energia mecânica como teste (ou critério) de validação do método numérico de integração



No caso movimento do projétil, sem resistência do ar (movimento não periódico)
os métodos de Euler e de Euler-Cromer mantêm a mesma precisão no cálculo da energia mecânica.

Repare que o passo temporal não é pequeno, de modo a enfatizar os desvios à trajetória exata (a analítica) e à energia mecânica

Teorema Trabalho – Energia: Sumário

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = **Trabalho** $= \ W_{0,1}$ a partir da posição C_0 até à posição C_1.

$\frac{1}{2} m\ |\vec{v}|^2 =$ **Energia Cinética** $= \ E_c$ a unidade é joule (J), J=kg $\cdot\ \mathrm{m}^2/s^2$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \frac{1}{2} m\ |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\ |\vec{v}_0|^2$$

$$W_{0,1} = E_{c,1} - E_{c,0}$$

Trabalho feito no sistema é igual à energia cinetica adicionada

Independente do caminho!

Para forças conservativas (dependem só da posição) também

$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$ **Energia Potencial** $= \ E_c$

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$$

$\Rightarrow$ **Conservação de energia** $E = \ E_c + E_p =$ constante em todo o movimento

Forças conservativas e não conservativas

<u>Forças conservativas:</u> O trabalho pode ser escrito em termos de energia potencial:

$$\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} \;\; = E_{p0} - E_{p1}$$

Ex:

- Gravítica $\vec{F}_{grav} = -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Elástica $\vec{F} = -k\vec{r}$
- Elétrica $\vec{F}_{elet} = -k\,\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

a força depende só na posição

<u>Forças não conservativas:</u> O trabalho **não** pode ser escrito em termos de energia potencial

$$W_{0,1}^{(não\ conservativo)} = \int_C \vec{F}^{(não\ conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

Ex:

- Resistência do ar $\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v}$
- Força de Magnus $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega} \times \vec{v}$
- Atrito $\vec{F}_{atrito} = -\,\mu\left|\vec{N}\right|\hat{v}$

a força não depende só na posição, mas por exemplo na velocidade ou tempo

Trabalho de forças não conservativas

Teorema Trabalho – Energia

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 = E_{c1} - E_{c0}$$

Sobreposição do trabalho

$$\vec{F} = \vec{F}^{(conservativa)} + \vec{F}^{(não\ conservativa)}$$

$$W_{0,1} = W_{0,1}^{(conservativo)} + W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

Para forças conservativas $\quad W_{0,1}^{(conservativo)} = E_{p0} - E_{p1}$

Então $\quad W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1} + W_{0,1}^{(não\ conservativo)} = E_{c1} - E_{c0}$

$$\Rightarrow E_{c0} + E_{p0} = E_{c1} + E_{p1} - W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

O trabalho realizado pelas forças não conservativas
é igual à diferença entre a energia total final e a energia total inicial

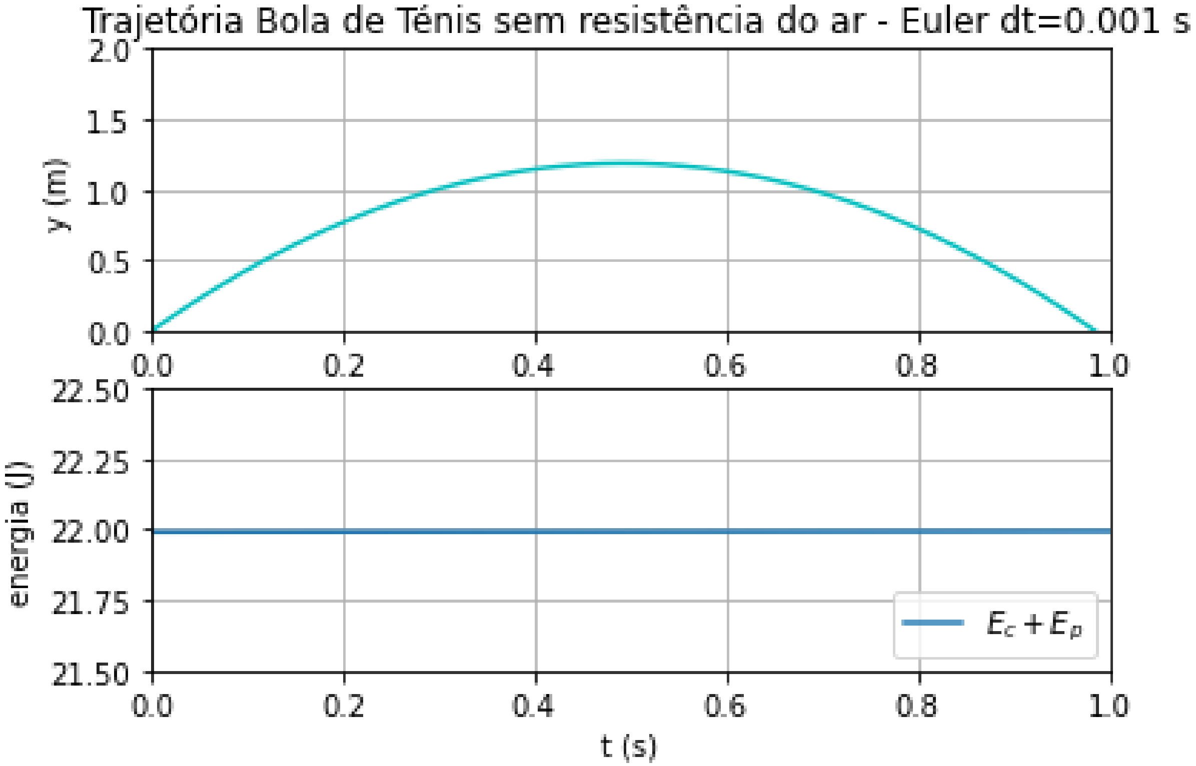
Trabalho de forças não conservativas

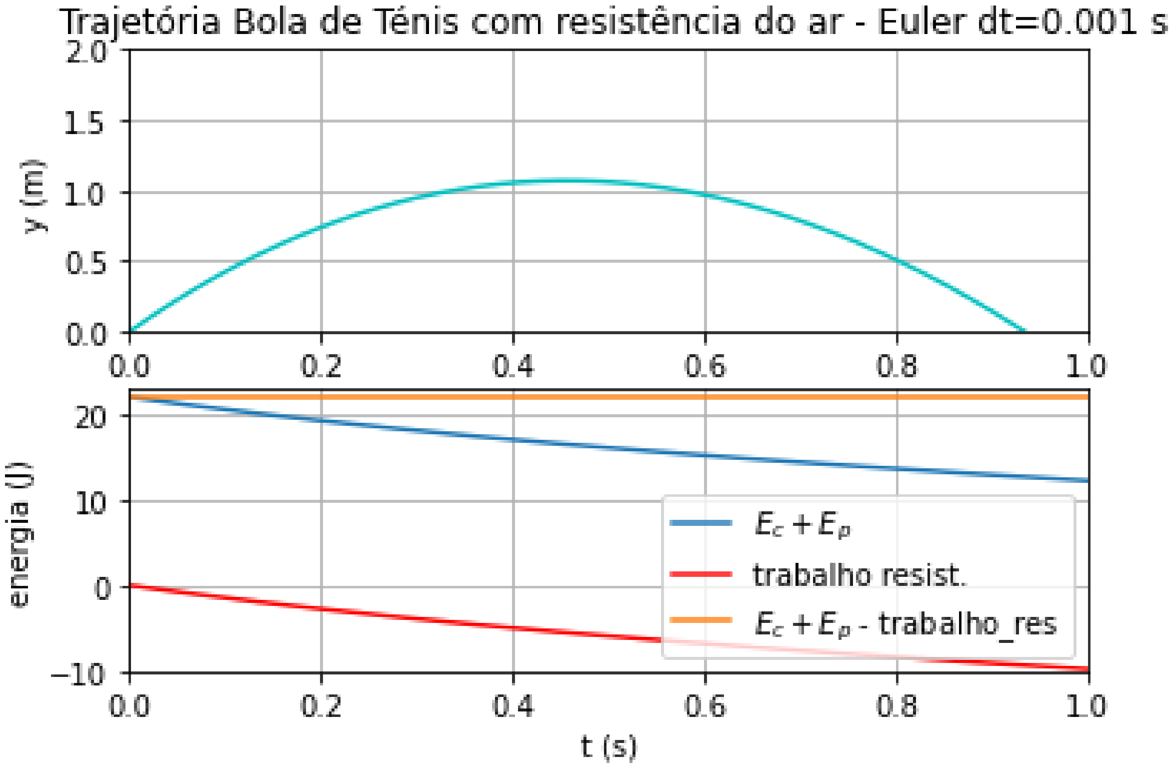
Ex: Movimento da bola de ténis com resistência do ar

Força conservativa: peso

Força não conservativa: resistência do ar

$$E(0) = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

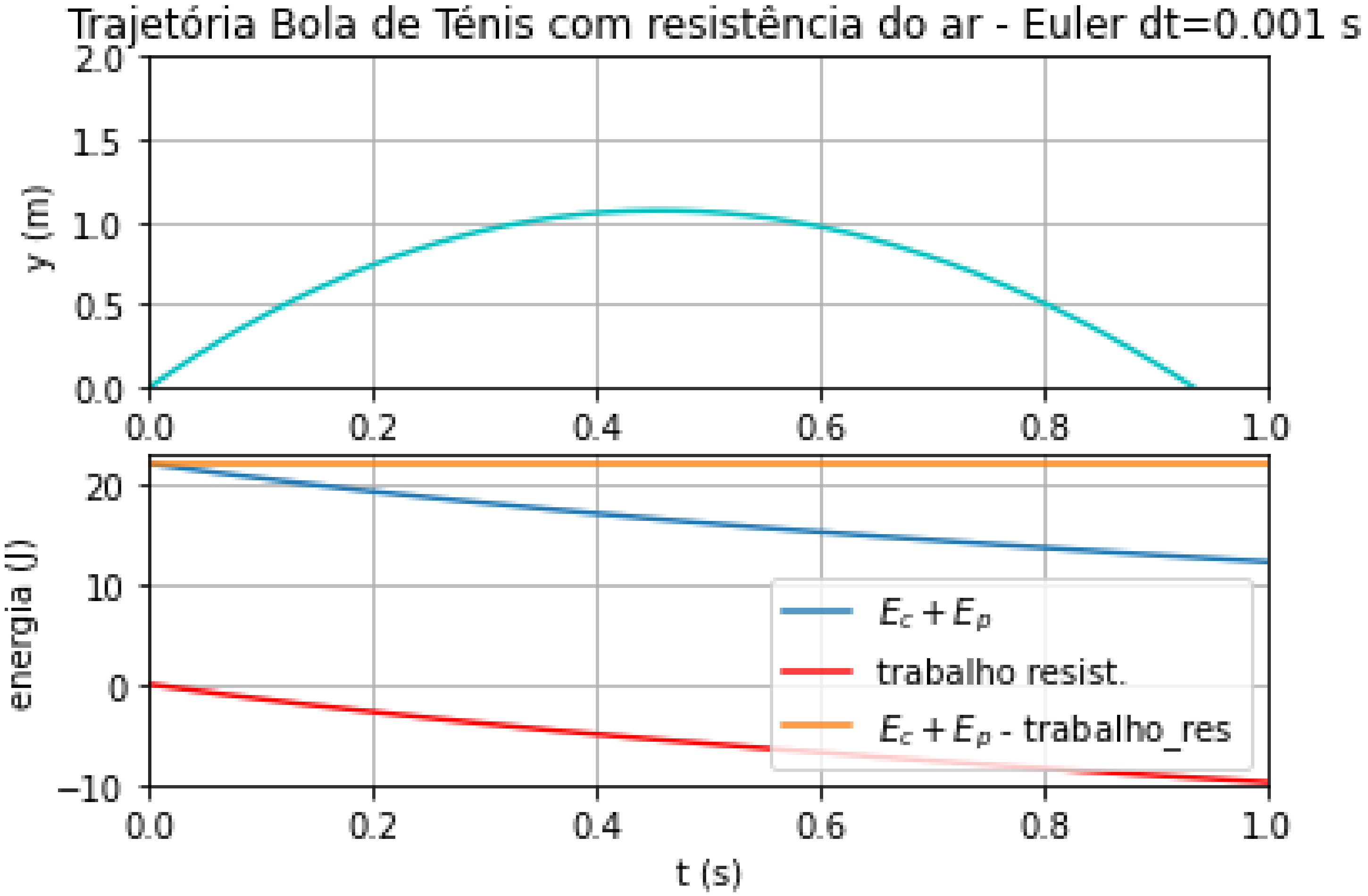




Trabalho de forças não conservativas

$$E(0) = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

Ex: Movimento da bola de ténis com resistência do ar



Cálculo direto do trabalho de forças não conservativas

Podemos calcular o trabalho diretamente por intergração

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad\qquad d\vec{r} = \vec{v}\, dt$$

$$W^{\,(não\ cons.)} = \int_C \vec{F}_{não\ cons.} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_{não\ cons.,x}\, v_x\, dt + F_{não\ cons.,y}\, v_y\, dt + F_{não\ cons.,z} v_z\, dt\right)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_{não\ cons.,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{não\ cons.,y}\, v_y\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{não\ cons.,z} v_z\, dt$$

Ex: Movimento da bola de ténis com **resistência do ar** (a 2 dimensões)

$$W^{\,(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$

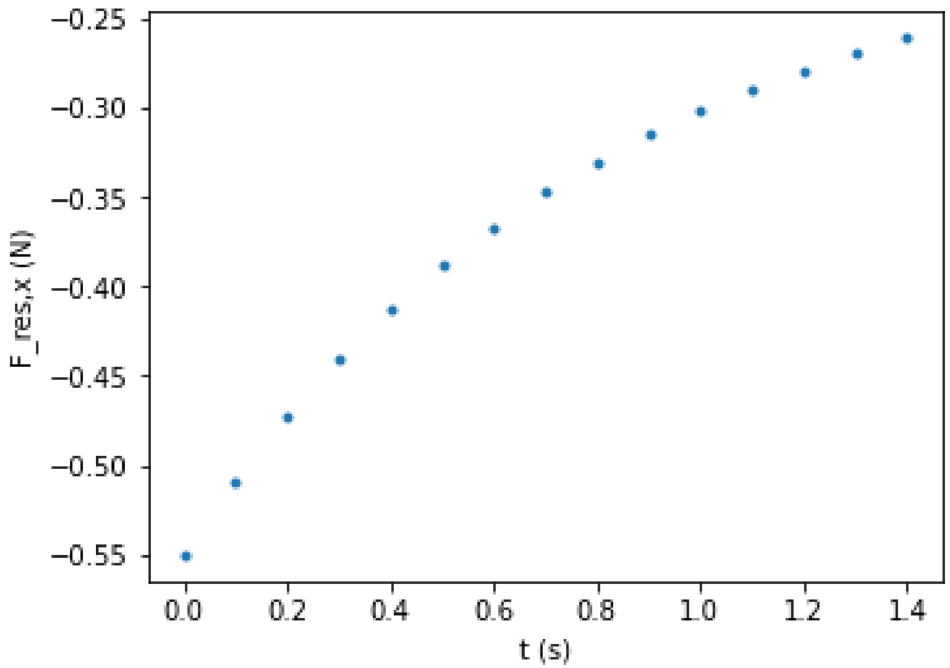
Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

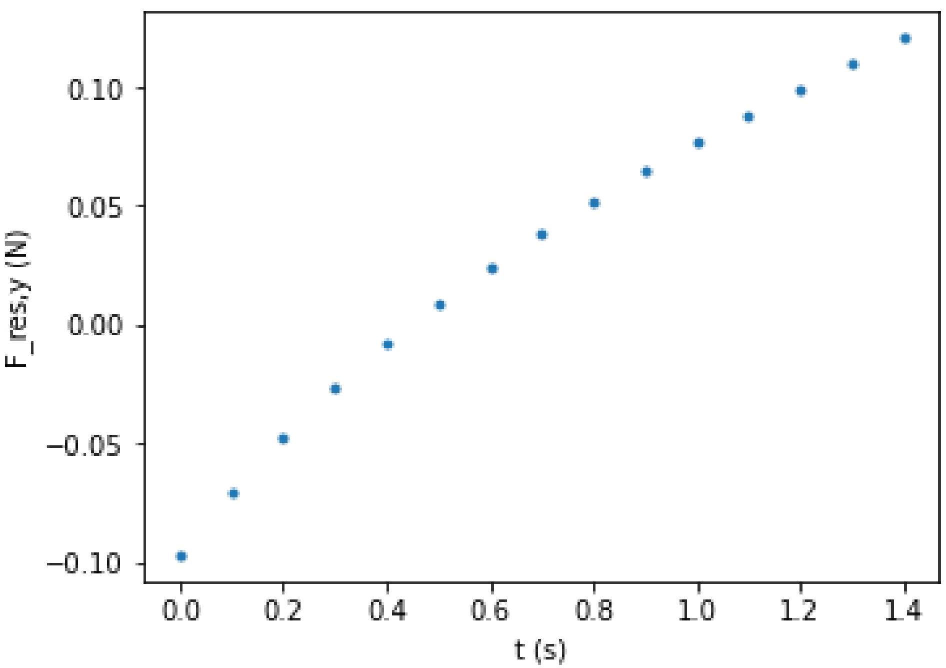
Exemplo: Bola de Ténis

Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical.

A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$





Solução do movimento pelo método de Euler

Integração numérica a 1 dimensão

Problema:

Temos uma função $f(x)$ expressa só em pontos x_i, entre entre dois pontos a e b

de índices $\boldsymbol{i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n}$ igualmente espaçados por δx, num total de $\boldsymbol{n + 1}$ **elementos.**

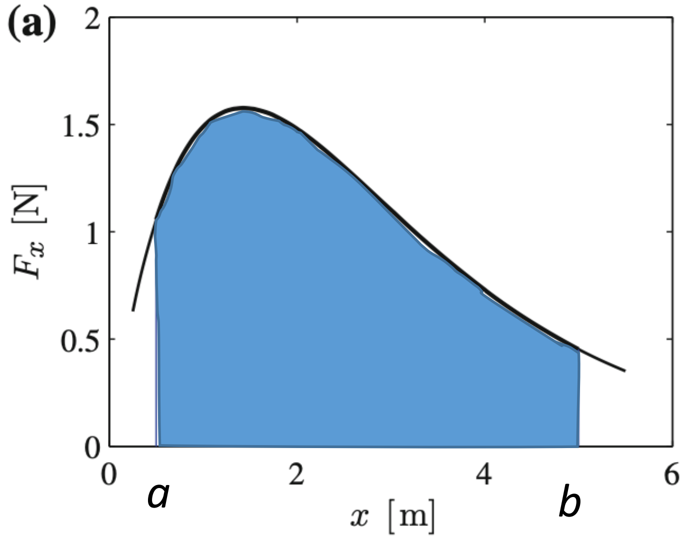
então $n = (b - a)/\delta x$ e $x_i = a + i\ \delta x$

Queremos calcular o integral desta função entre dois pontos a e b

$$I = \int_a^b f(x)\ dx$$

$\Rightarrow$ aproximar por **integração numérica.**

A interpretação geométrica do integral é a área limitada pela função entre os dois pontos extremos a e b.

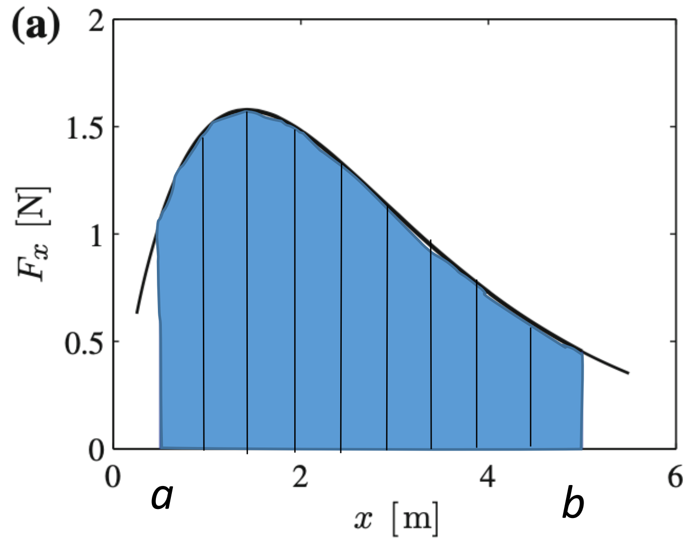


Integração numérica

Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de $\boldsymbol{n}$ fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

Se dividirmos a área em n fatias de espessura

$$\delta x = (b - a)/n$$

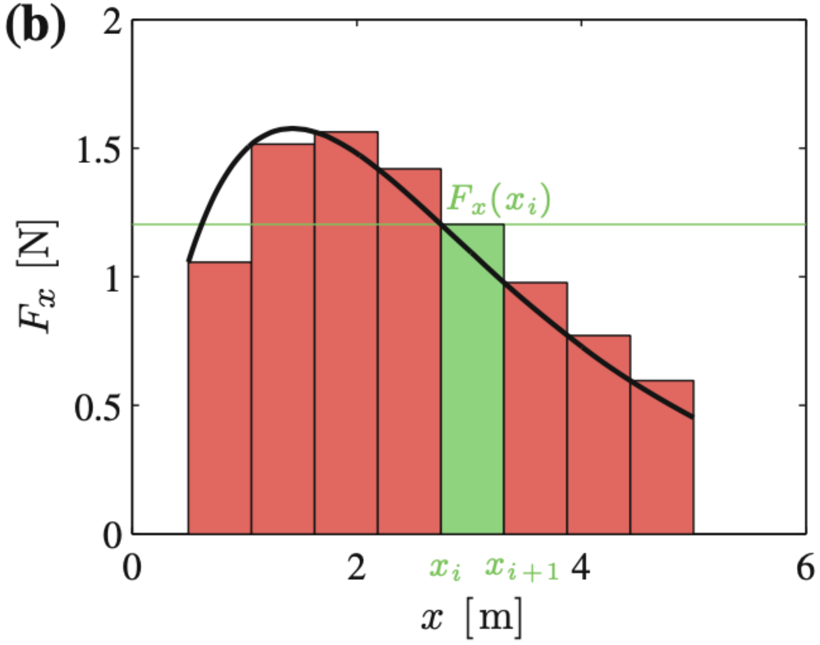


$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$x_i = a + (i - 1)\delta x$$

Integração numérica

Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de $\boldsymbol{n}$ fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.



$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \qquad\qquad \delta x = (b-a)/n$$

Aproximação retangular: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \;\approx\; f(x_i)\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\delta x$$

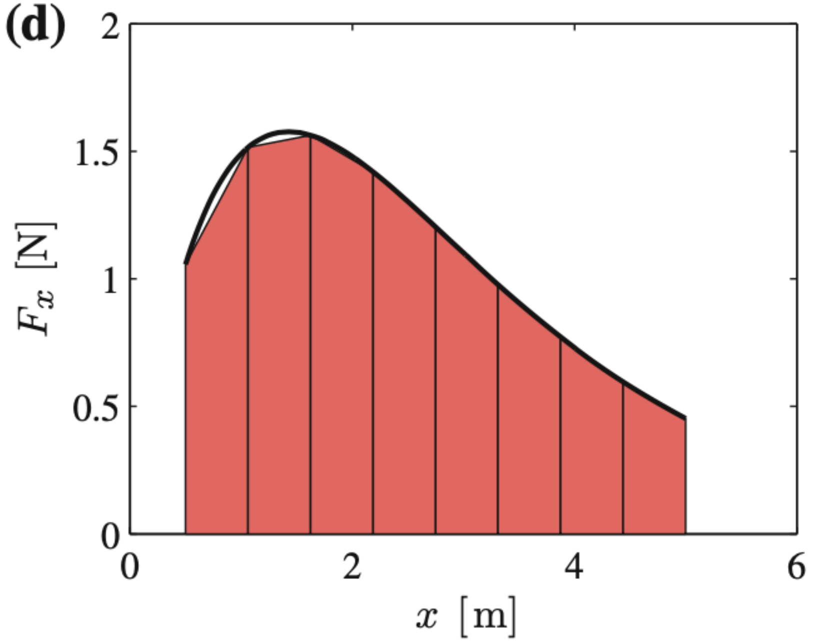
$$= \delta x \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$= \delta x \times [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})]$$

Integração numérica

Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de $\boldsymbol{n}$ fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \quad \delta x = (b-a)/n$$



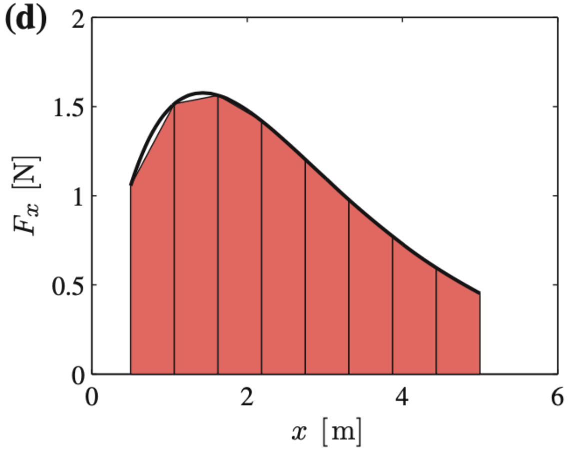
Aproximação trapezoidal: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\;\delta x$$

$$= \delta x \times \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

Integração numérica



Aproximação trapezoidal: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\, \delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\, \delta x =$$

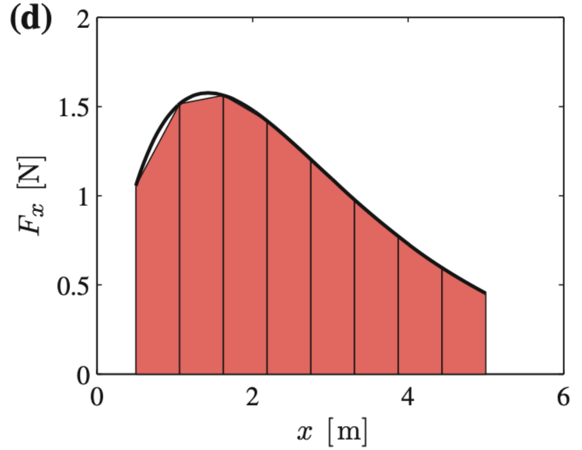
$$= \delta x \times \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

Em python podemos obter o integral da função $f(x)$ pela aproximação trapezoidal:

```
Integral = dx * ((f[0]+f[n])*0.5+np.sum(f[1:n]))
```

Note que temos $n + 1$ valores da função.

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:



exato — aprox. trapezoidal

$$Erro = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx - \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\, \delta x \right|$$

Série de Taylor à volta de x_i

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + (x - x_i)^2 \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \mathcal{O}((x - x_i)^3)$$

então o integral é

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + (x - x_i) \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + (x - x_i)^2 \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \mathcal{O}((x - x_i)^3) \right] dx$$

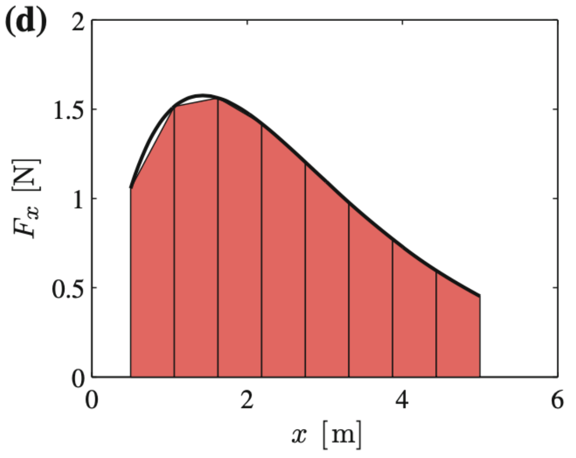
$$= f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3} \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \mathcal{O}\big((x_{i+1} - x_i)^4\big)$$

$$= f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

integral exato

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal: $erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - \left(\frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\, \delta x \right)_{ap.\,trap} \right|$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\delta x^4)$$ exato



Agora, como é a aproximação trapezoidal?

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + (x_{i+1} - x_i)^2 \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \mathcal{O}((x_{i+1} - x_i)^3)$$

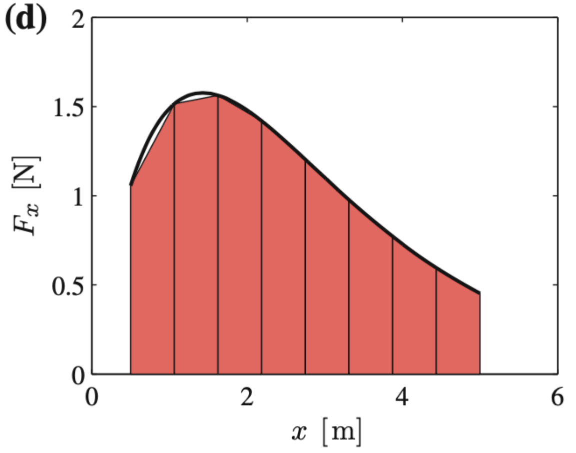
$$= f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

Então

$$\Rightarrow \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = f(x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\delta x = f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{4} + \mathcal{O}(\delta x^4)$$ aproximação trapezoidal

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:



Substituir no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx - \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\, \delta x \right|$$

$$= \left| \left(f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{6} + \sigma(\delta x^4) \right) \right.$$
$$\left. - \left(f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{4} + \sigma(\delta x^4) \right) \right| = \sigma(\delta x^3)$$

O erro local de truncatura do integral de uma fatia é da $\sigma(\delta x^3)$.

O erro global do integral completo, que é um somatório de n fatias, é a acumulação dos erros locais,

$$n\, \sigma(\delta x^3) = \frac{b-a}{\delta x}\, \sigma(\delta x^3) = \sigma(\delta x^2)$$

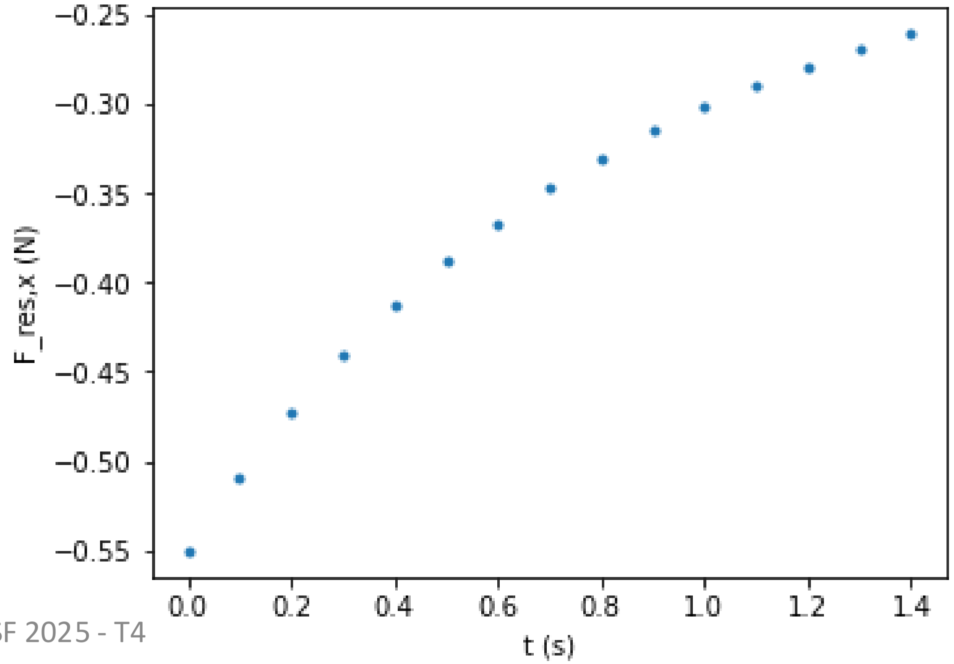
Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

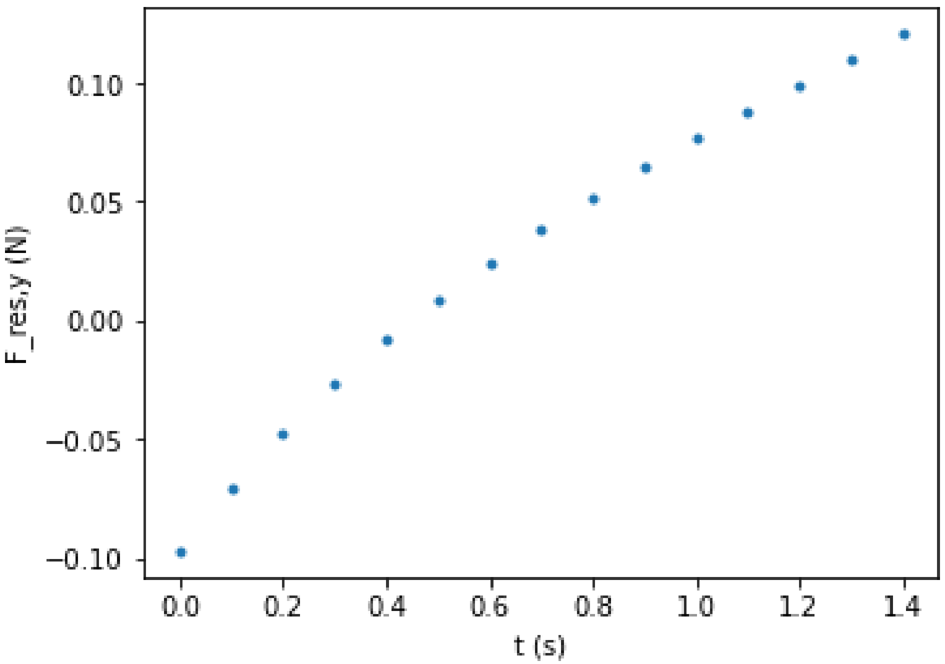
Ex: Bola de Ténis

Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes: $t_a = 0$, $t_b = 0.4$ s e $t_c = 0.8$ s.

$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$





Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

Ex: Bola de Ténis

Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes: $t_a = 0$, $t_b = 0.4$ s e $t_c = 0.8$ s.

$$W^{\,(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$

1. Calcular velocidade pelo método de Euler ⇒ forças em cada passo
2. Integral numérico
3. (Compare com o resultado usando conservação de energia)

Resultado:

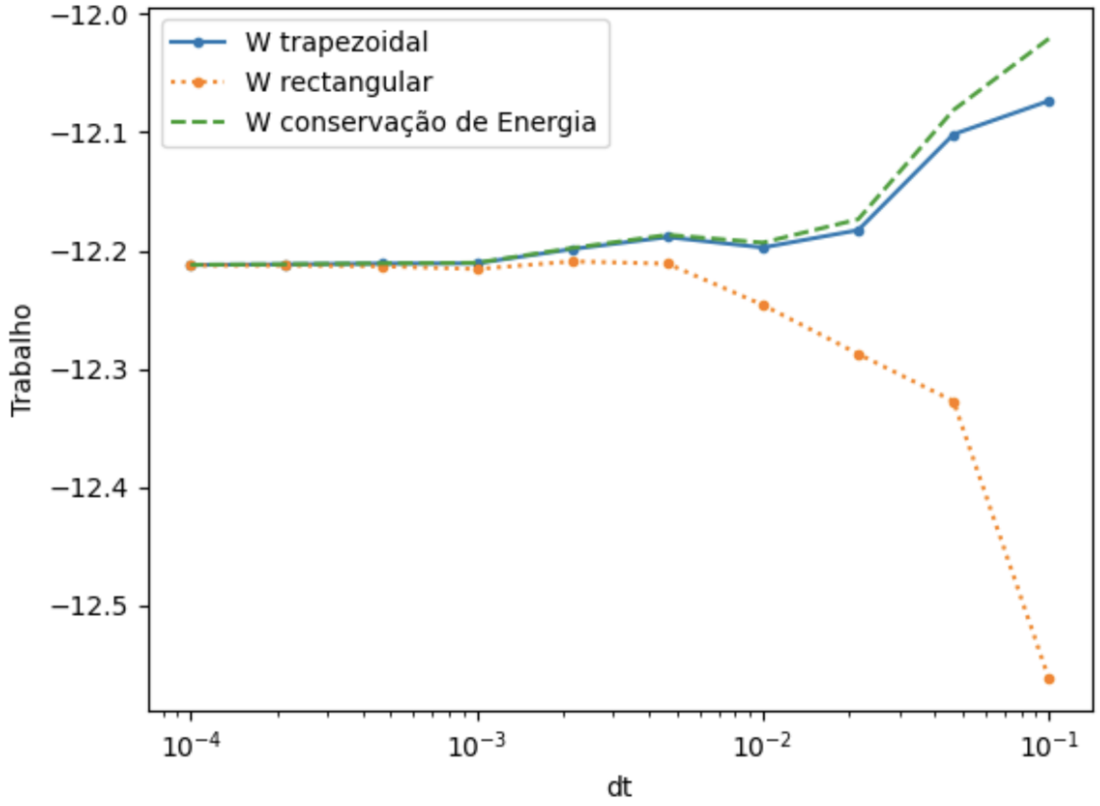
c) 0 J; -4.98 J; - 8.38 J

Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

Ex: Bola de Ténis

Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes: $t_a = 0$, $t_b = 0.4$ s e $t_c = 0.8$ s.



Potência

Trabalho: $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C m\, \vec{a} \cdot d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$$

$$d\vec{r} = \vec{v}\, dt \qquad \left(\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}\right)$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = P_o$$

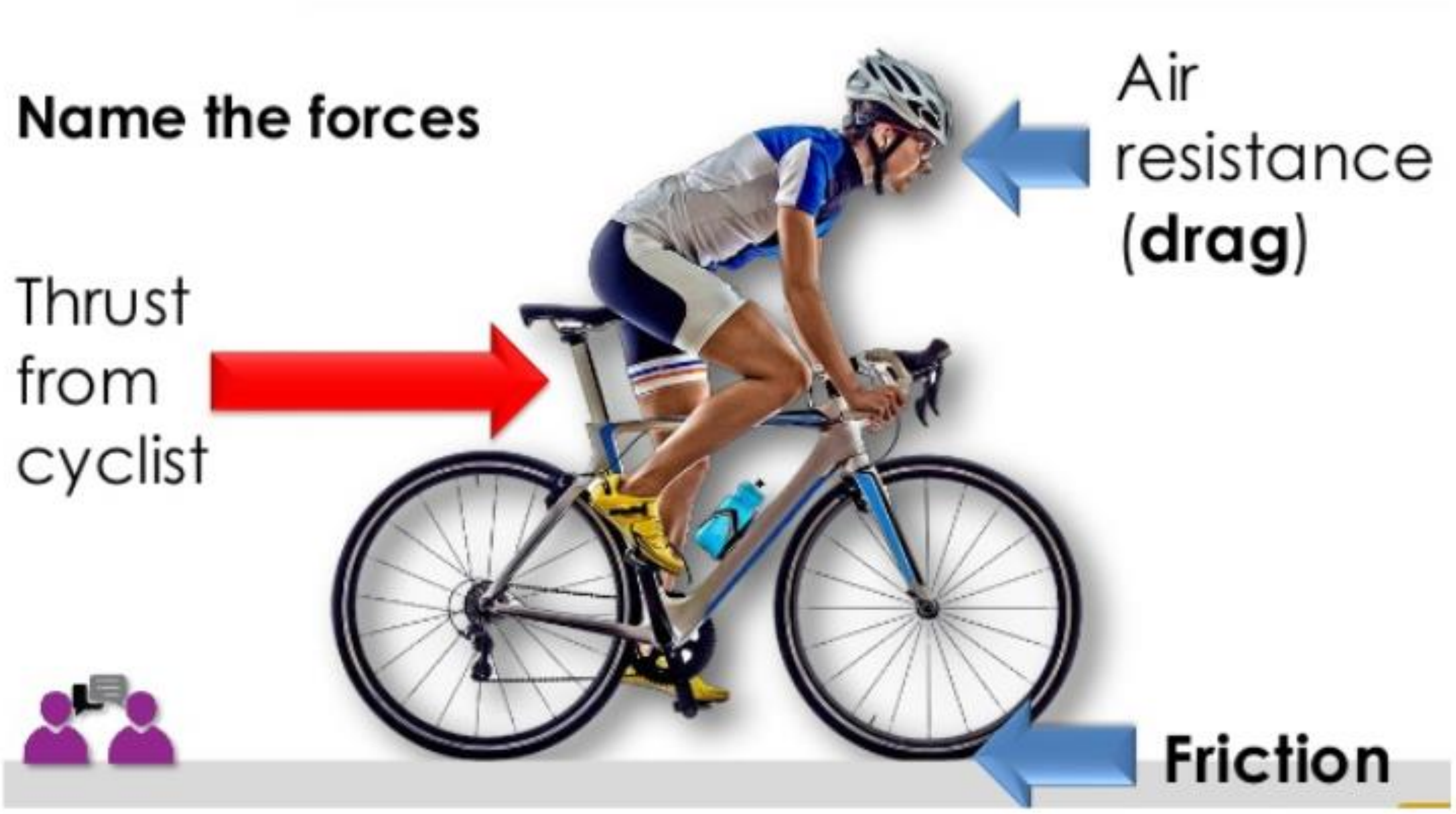
Potência = trabalho realizado por unidade de tempo

Unidade 1 W = 1 J/s

Ex: **Potência desenvolvida por um ciclista**

O ciclista para manter uma velocidade constante (força resultante nula) tem de pedalar.

O esforço do ciclista serve sobretudo para anular as forças de resistência do ar e a força de resistência ao rolamento (ou fricção).

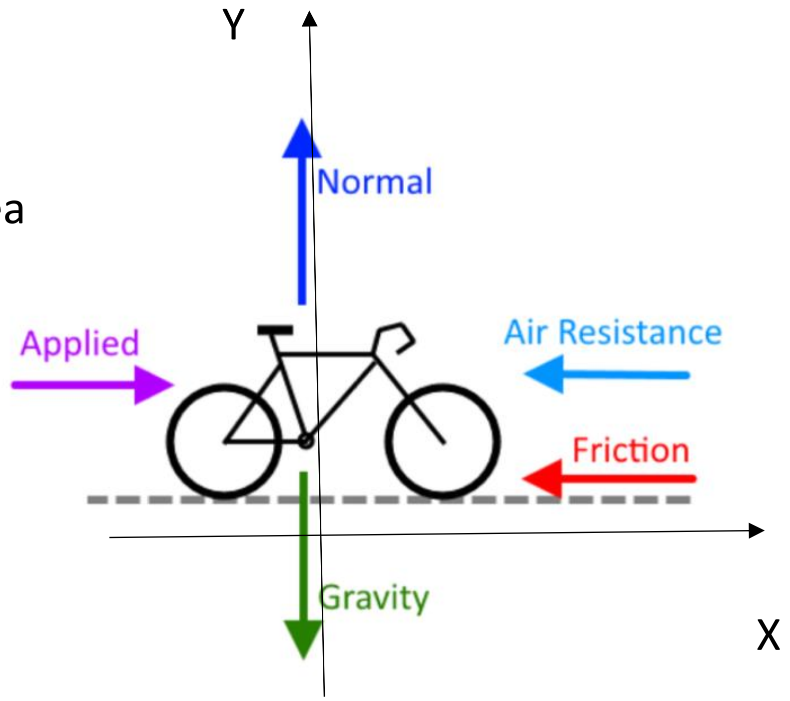


Potência desenvolvida por um ciclista

O ciclista para manter uma velocidade constante (força resultante nula) tem de pedalar.
O esforço do ciclista serve sobretudo para anular as forças de resistência do ar a força de resistência ao rolamento (ou fricção).

Forças:

- Força desenvolvida pelo ciclista $\vec{F}_{cic}$
- Força de resistência do ar $\vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} |\vec{v}|\, \vec{v},$ A=área
- Peso $\vec{P}$
- Normal $\vec{N}$
- Força de resistência ao rolamento ou fricção $|\vec{F}_{rol}| = \mu\, |\vec{N}|$



Potência desenvolvida por um ciclista:

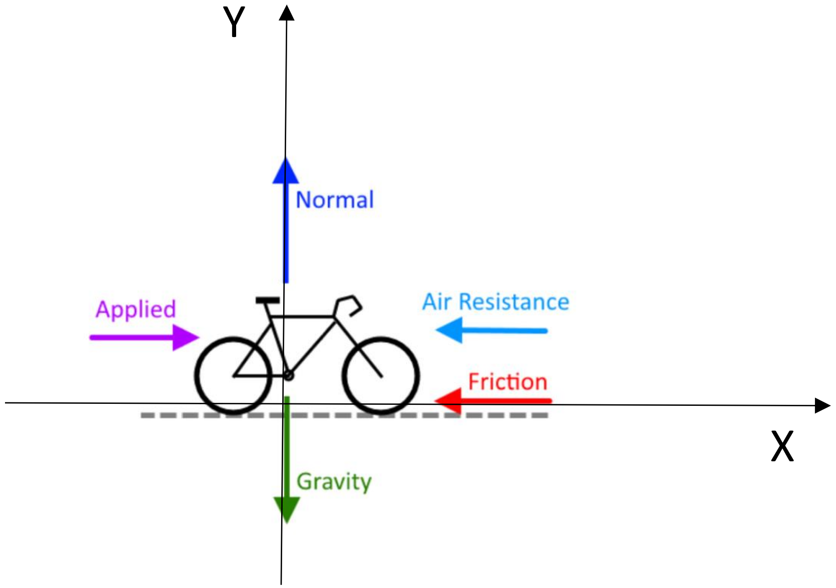
Forças:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} + 0 - F_{res} - F_{rol} + 0 \\ F_y = 0 - P + 0 + 0 + N \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - F_{res} - \mu N \\ 0 = -mg + N \end{cases} \qquad \begin{cases} F_x = F_{cic} - F_{res} - \mu N \\ N = mg \end{cases}$$

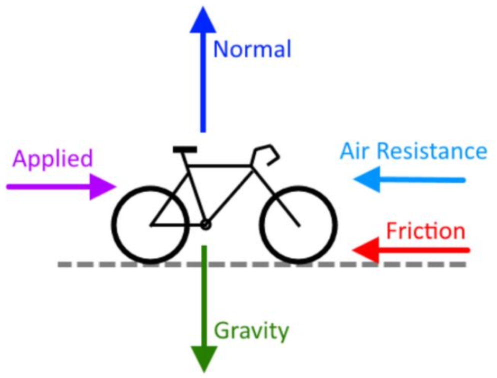
$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \dfrac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g \\ N = mg \end{cases}$$



Notação a seguir : $|\vec{N}| \equiv N$

Nunca confundir $|\vec{N}| \equiv N$ com a componente N_x

Potência desenvolvida por um ciclista



Forças:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \dfrac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g \\ N = mg \end{cases}$$

Qual a potência desenvolvida pelo ciclista manter uma <u>velocidade uniforme</u> (constante) (ou $F_x = 0$) ?

Potência $P_{o,cic} = F_{cic}\, v = ?$

$$F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = 0$$

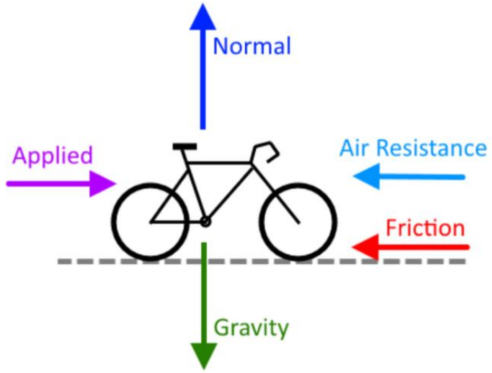
e movimento sempre no sentido positivo $v_x = v$

$$\Rightarrow F_{cic} = \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g$$

$$\Rightarrow P_{o,cic} = \left(\frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g \right) v$$

Problema 1

Qual a potência desenvolvida pelo ciclista para **manter uma velocidade uniforme** (constante) de 30 km/k e de 40 km/h?



- O coeficiente de resistência μ de um piso liso de alcatrão é de 0.004
- O coeficiente de resistência do ar é $C_{res} = 0.9$
- A massa do ciclista-bicicleta é de 75 kg,
- e a área frontal do ciclista-bicicleta é de $A = 0.30$ m²

$$F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = 0$$ e movimento sempre no sentido positivo $v_x = v$

$$\Rightarrow F_{cic} = \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g$$

$$\Rightarrow P_{o,cic} = \left(\frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g\right) v$$

$v = 30$ km/h $\Rightarrow$ $P_{o,cic} = 120\ \mathrm{W} = 0.163\ \mathrm{cv}$

$v = 40$ km/h $\Rightarrow$ $P_{o,cic} = 260\ \mathrm{W} = 0.353\ \mathrm{cv}$

E o record mundial de velocidade 296.010 km/h?

$v = 296.010$ km/h $\Rightarrow$ $P_{o,cic} = 92177\ \mathrm{W} = 125\ \mathrm{cv}$ como é possível??

Record mundial de velocidade   set 2018

Denise Mueller-Korenek   183.932 mph (milhas/hora) = 296.010 km/h

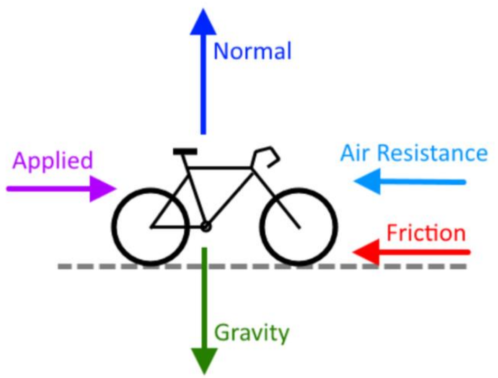
Velocidade do ciclista

Como é possível? Reduzir drasticamente resistência do ar

https://www.youtube.com/watch?v=A6y_G_DJAzM

Velocidade do ciclista, dado a potência

Se soubermos a potência desenvolvida pelo ciclista podemos calcular a lei da velocidade e a lei do movimento



$$P_{cic} = F_{cic}\, v \quad \Longrightarrow \quad F_{cic} = P_{cic}/v$$

Forças:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = m\, a_x \\ F_y = -mg + N = 0 \end{cases}$$

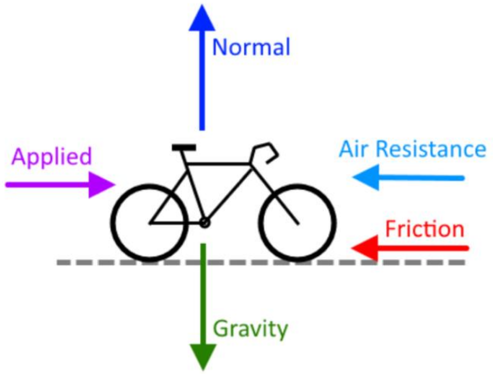
$$m\, a_x = \frac{P_{o,cic}}{v} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g$$

Problema 2

Determine a evolução temporal da velocidade de um ciclista, se este produzir continuamente a potência 0.4 cv e partir com um empurrão de 1 m/s.

a) Qual a sua velocidade terminal?
b) Ao fim de quanto tempo atinge 90% da sua velocidade terminal?
c) Quanto tempo leva a percorrer 2 km?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

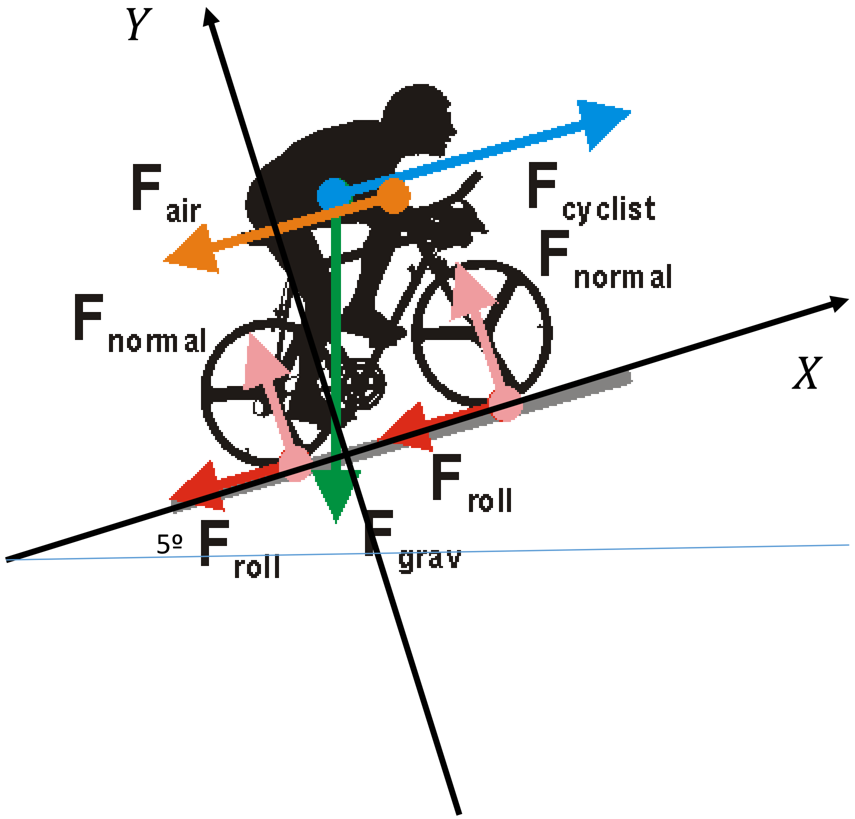


Forças: $\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = m\, a_x \\ F_y = -mg + N = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\, v} - \frac{C_{res}}{2m} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, g$$

Problema 3
O ciclista do problema anterior sobe uma colina com uma inclinação de 5°.



a) Quanto tempo demora a percorrer 2 km?
b) Qual a sua velocidade terminal?

Forças: $\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - mg\sin 5^\circ - \dfrac{C_{res}}{2} A\,\rho_{ar} v\, v_x - \mu\, N = m\, a_x \\ F_y = -m\, g\cos 5^\circ + N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{P_{o,cic}}{v} - mg\sin 5^\circ - \dfrac{C_{res}}{2} A\,\rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g\cos 5^\circ = m\, a_x \\ N = m\, g\cos 5^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\,v} - g\sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2m} A\,\rho_{ar} v\, v_x - \mu\, g\cos 5^\circ$$

Potência de um ciclista

Problema 2:

$$a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\ v} - \frac{C_{res}}{2m} A\ \rho_{ar} v\ v_x - \mu\ g$$

Problema 3:

$$a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\ v} - g \sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2m} A\ \rho_{ar} v\ v_x - \mu\ g \cos 5^\circ$$

Dados:

$\mu = 0.004$

$C_{res} = 0.9$

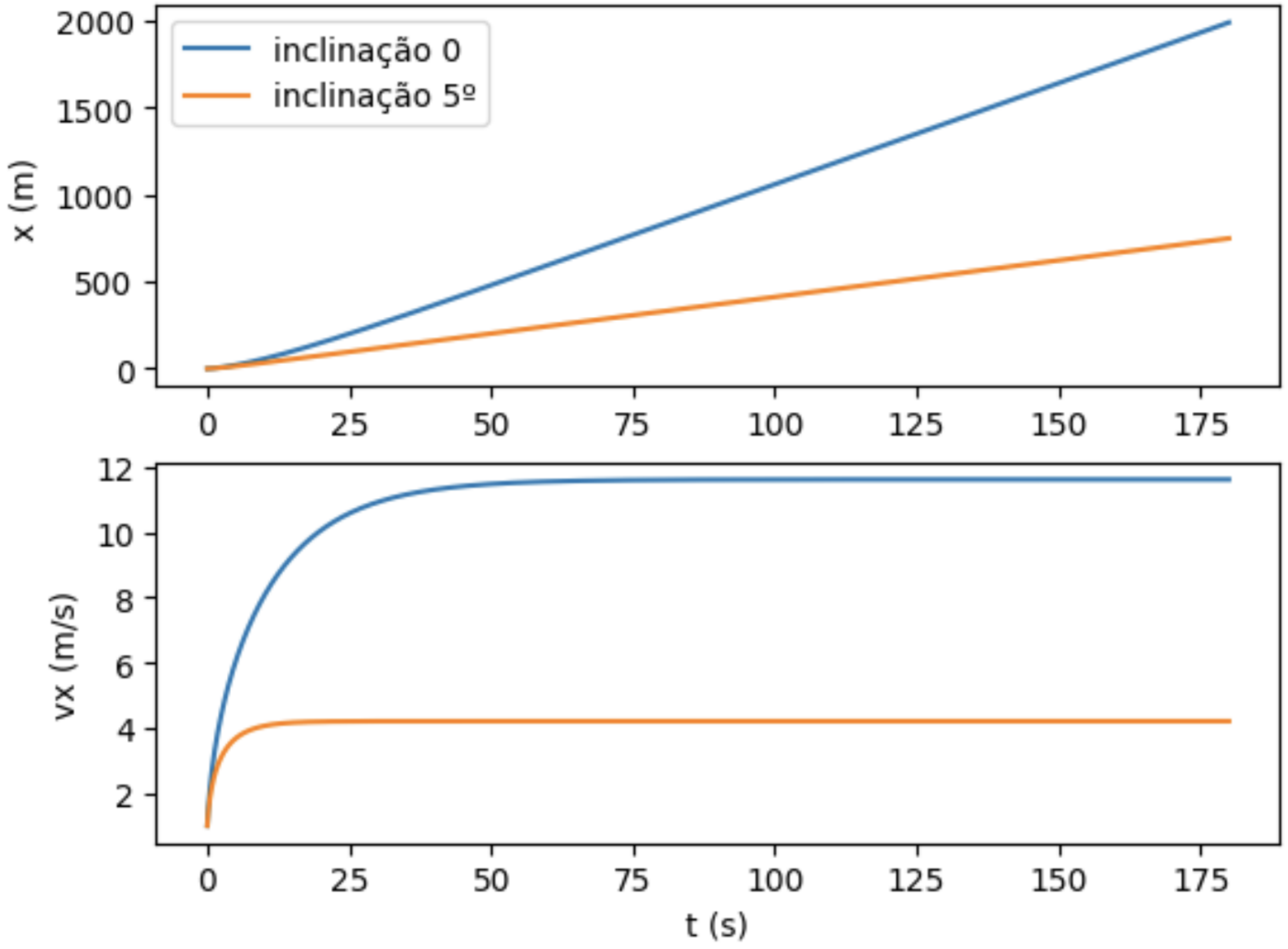
$m = 75$ kg

$A = 0.30$ m^2

$P_{o,cic} = 0.4$ cv

$v_0 = 1$ m/s

Solução numérica (Euler)



Momento e colisões

Leis de conservação

Equação fundamental da dinâmica:

$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) \quad \Longrightarrow \vec{r}(t)$

obtemos a velocidade e a posição em função do tempo

Teorema Trabalho-Energia:

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \; = \frac{1}{2} m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\,|\vec{v}_0|^2$

obtemos a velocidade em função da posição

e a lei de Conservação da Energia Mecânica (para sistemas só com forças conservativas)

Impulso de uma força: $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt$

$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$

vamos obter a lei da Conservação do Momento (para sistemas isolados)

Momento e colisões

Teorema Impulso-momento

Impulso $$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{d\vec{v}}{dt}\, dt = m\,\vec{v}(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$ Diferença de momento

em que $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$ é o **momento** do corpo no instante t.

A lei fundamental da dinâmica é reescrita em termos do momento:

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Quando a massa do corpo é constante obtemos a forma conhecida

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

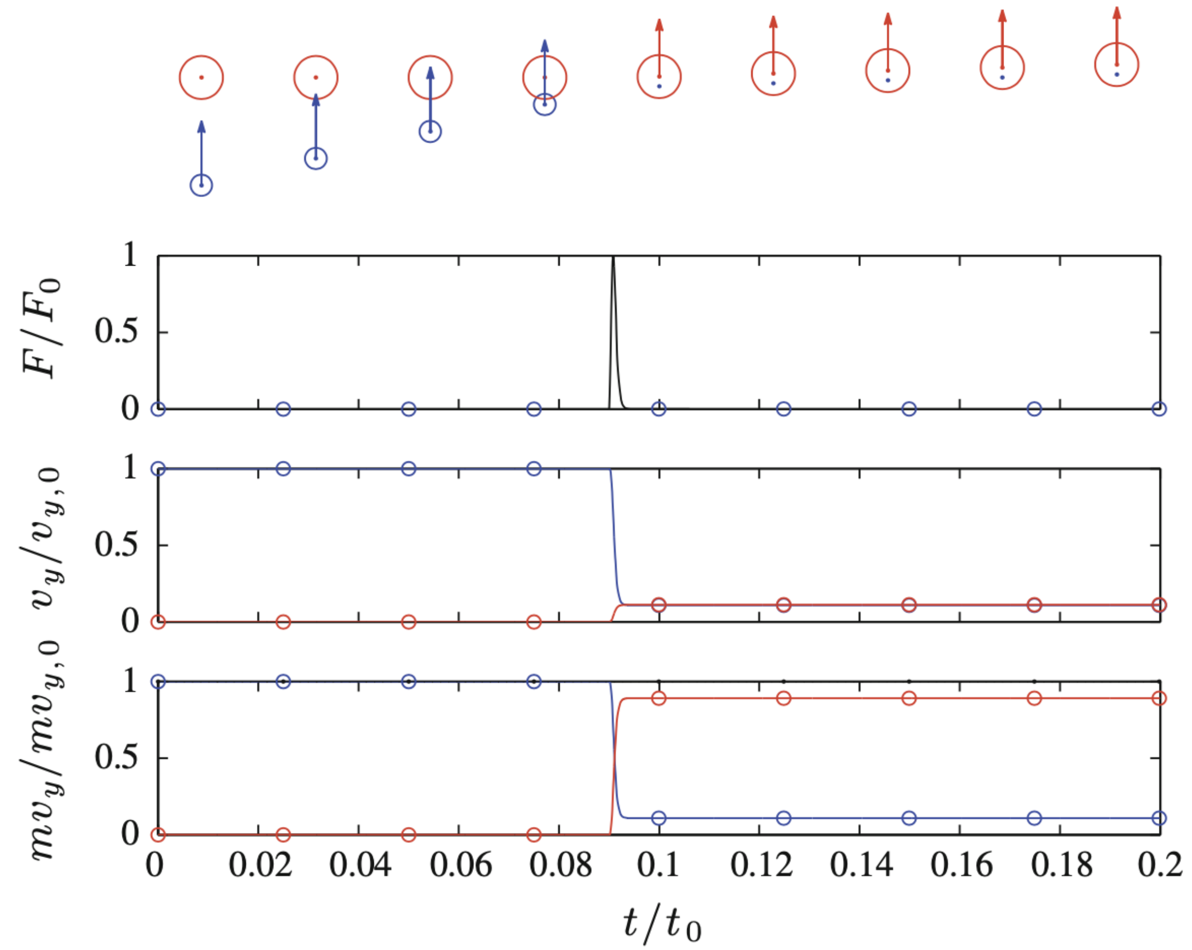
Quando $\vec{F} = 0,\quad \vec{p}_1 = \vec{p}_0$ ou **conservação do momento**

Sistema de 2 corpos

EX: Colisão meteoro-planeta

início t_0

termina t_1



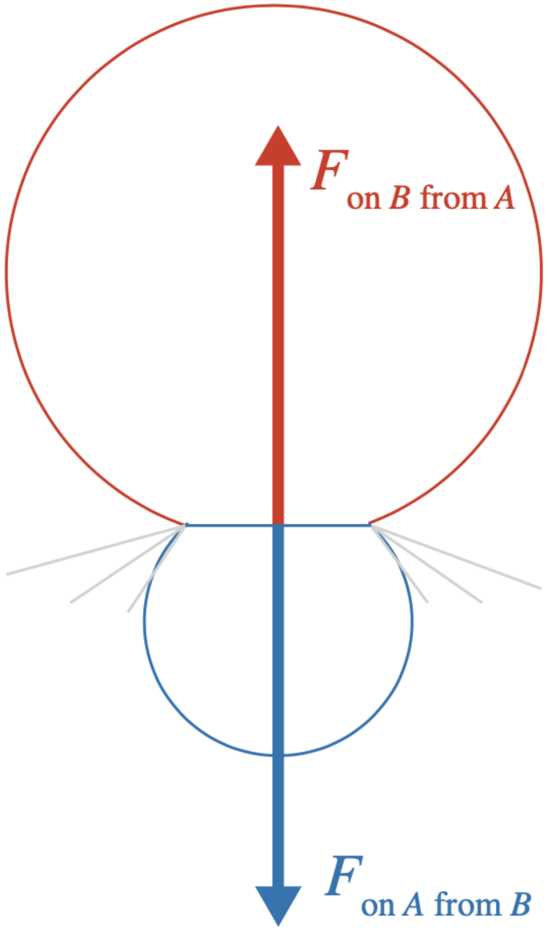


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

Sorenssen p. 353

Sistema de 2 corpos

Colisão meteoro-planeta

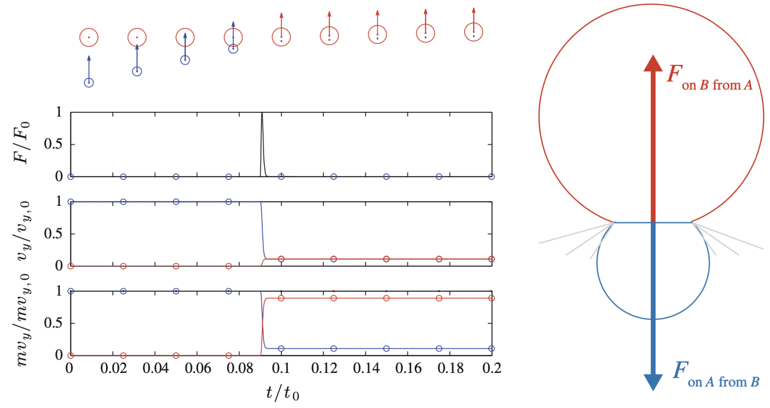


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

início t_0

meteoro (A) $m_A\ ,\ \vec{v}_{A,0}$

planeta (B) $m_B\ ,\ \vec{v}_{B,0}$

termina t_1

quais são os valores após a colisão?

Segunda lei de Newton

Força de B em A: $\vec{F}_A = m_A\, \vec{a}_A$

Força de A em B: $\vec{F}_B = m_B\, \vec{a}_B$

Terceira lei de Newton

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A$$

Mas não conhecemos as forças...

$$m_A\, \vec{a}_A = -m_B\, \vec{a}_B$$

ou

$m_A\, \vec{a}_A + m_B\, \vec{a}_B = 0$ em todos os tempos.

Sistema de 2 corpos

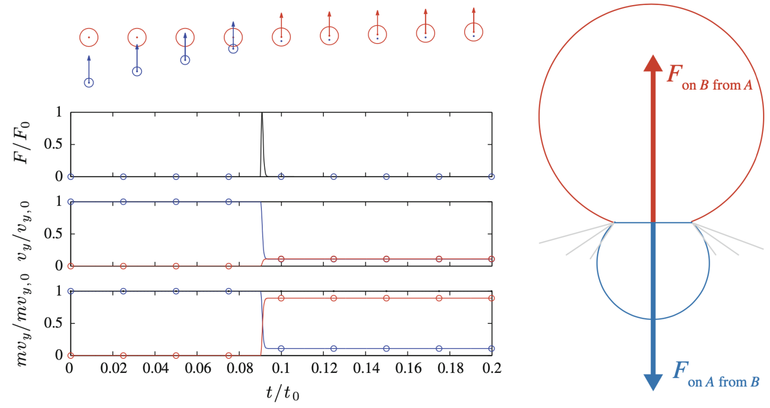


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

Colisão meteoro-planeta

$m_A\,\vec{a}_A + m_B\,\vec{a}_B = 0$ em todos os tempos.

Integrar

$$\int_{t_0}^{t_1} m_A\,\vec{a}_A + m_B\,\vec{a}_B\;dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt}\,dt \quad = m_A\vec{v}_A(t_1) - m_A\vec{v}_A(t_0) + m_B\vec{v}_B(t_1) - m_B\vec{v}_B(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow m_A\vec{v}_A(t_1) + m_B\vec{v}_B(t_1) = m_A\vec{v}_A(t_0) + m_B\vec{v}_B(t_0)$$

$$\vec{p}_A(t_1) + \vec{p}_B(t_1) = \vec{p}_A(t_0) + \vec{p}_B(t_0)$$

Para t_0 e t_1 quaisquer

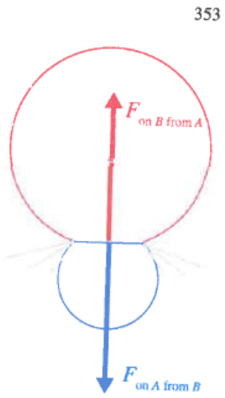
Momento total

$$\vec{P} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = constante$$

Lei da conservação de momento

Sistema de 2 corpos

Colisão meteoro-planeta



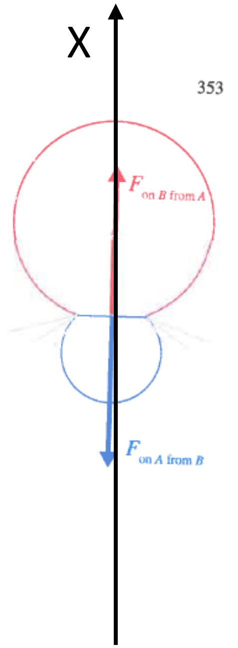
Antes da colisão		**Depois da colisão**	
Corpo A	com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$	Corpo A	com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$
Corpo B	com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$	Corpo B	com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

Depois da colisão os 2 corpos seguem juntos $\vec{v}_1$

Sabemos que o momento total é constante $\quad \vec{P} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$

Permite determinar a velocidade dos corpos depois da colisão

Colisão meteoro-planeta



Antes da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

Depois da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

Depois da colisão os 2 corpos seguem juntos $\vec{v}_1$

$$P_x = m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}$$

$$P_x = m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

O momento total conserva-se:

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A\ v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A\ v_{1x} + m_B v_{1x} = (m_A + \ m_B) v_{1x}$$

$$\Rightarrow \quad v_{1x} = \frac{m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}}{m_A + \ m_B}$$

Exemplo de uma colisão inelástica

Sistema de 2 corpos

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_A$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_B$

Que forças existem entre os 2 corpos?

Forças internas: forças entre os corpos do sistema (sistema Terra-Sol: força gravítica de atração)

$$\vec{F}_A^{(B)} \qquad \vec{F}_B^{(A)}$$

Forças externas: forças entre os corpos do sistema e o meio ambiente

$$\vec{F}_A^{ext} \qquad \vec{F}_B^{ext}$$

Existem fenómenos com forças complicadas

O Impulso é difícil ou impossível de ser calculado

Sistema de 2 corpos

2ª Lei de Newton:

3ª Lei de Newton:

Corpo A $\quad \sum \vec{F}_A^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$

$$\vec{F}_B^{(A)} = -\vec{F}_A^{(B)}$$

Corpo B $\quad \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$

Somar: $\quad \sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} = \sum \vec{F}^{ext}$$

Generalização da 2ª Lei de Newton para o sistema de 2 corpos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}^{ext}$$

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{P}$$

momento total do sistema de 2 corpos

independente das forças internas

Sistema de 2 corpos

Se todas as forças externas forem nulas $\sum \vec{F}^{ext} = 0$

temos um sistema de 2 corpos <u>isolado</u>

implica $$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Num sistema de 2 corpos isolado o momento total conserva-se

<u>Generalização para sistema de muitos corpos (N)</u>

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Se o sistema for isolado ($\sum \vec{F}^{ext} = 0$) temos a conservação do momento total $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$

Colisões

Processo que envolve forças muito grandes entre os corpos, durante um intervalo de tempo muito curto

Num sistema de 2 corpos isolado, em que **o momento total conserva-se**:

Antes da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

Depois da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

$$\vec{p}_{A,0} + \vec{p}_{B,0} = \vec{p}_{A,1} + \vec{p}_{B,1}$$

Colisões: **2 corpos isolado,** em que o momento total conserva-se.

Antes da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

Depois da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

A 1 dimensão, o momento total é:

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}$$

$$m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

Pela conservação do momento total

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

também em qualquer instante da colisão

Se soubermos as quantidades antes da colisão (massa e velocidades),

temos 1 equação com 2 incógnitas

$v_{A,1x}$ e $v_{B,1x}$

(será preciso mais uma equação para serem calculadas)

Colisões

Conservação de momento

- Se soubermos as quantidades antes da colisão (massa e velocidades), temos 1 equação com 2 incógnitas $v_{A,1x}$ e $v_{B,1x}$:

$$\vec{p}_{A,0} + \vec{p}_{B,0} = \vec{p}_{A,1} + \vec{p}_{B,1}$$

será preciso mais uma equação para serem calculadas

Se só atuarem forças conservativas

$$E_{c,0} + E_{p,0} = E_{c,1} + E_{p,1}$$

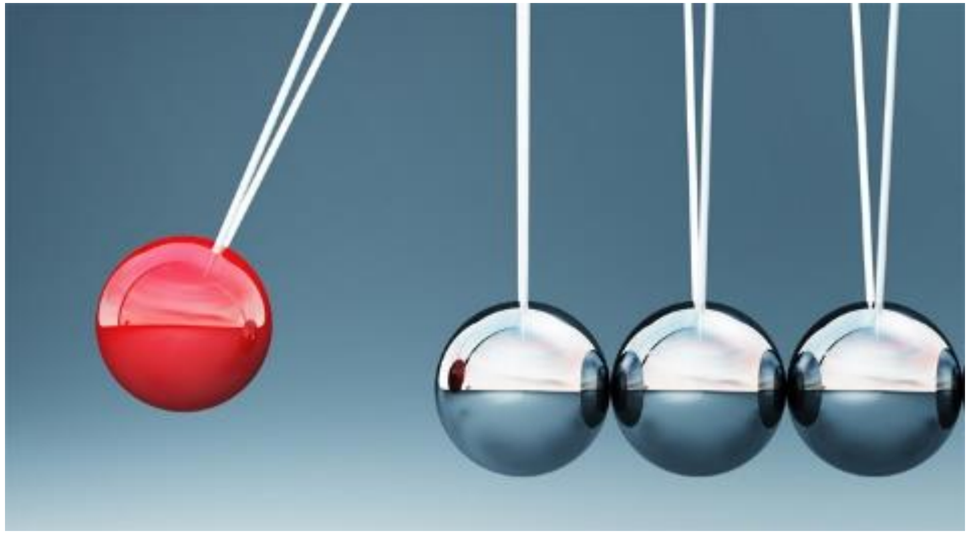
- a energia mecânica total também se conserva (mais uma equação)
- Quando acontece chama-se **colisão elástica**

Quando <u>não há</u> conservação da energia mecânica, chama-se **colisão Inelástica**

- é preciso mais uma informação

(ex. colisão planeta-meteoro as velocidades foram iguais depois da colisão)

Colisões



Ex. **Colisão Elástica: Pêndulo de Newton**

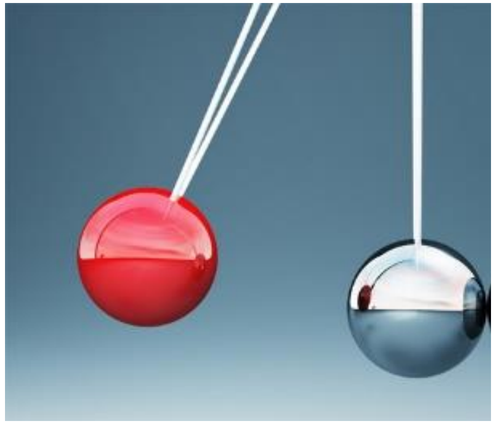
Lei de <u>conservação do momento</u>:

Antes: o momento proveniente da bola que vai colidir

Depois da colisão: há várias possibilidades de combinações entre as várias massas e velocidades.

As forças entre as bolas são conservativas. Tem-se também a <u>conservação da energia</u>.

Ex. **Colisão Elástica: Pêndulo de Newton**



Considere primeiro o sistema com 2 bolas

Antes da colisão: o momento proveniente da bola que vai colidir

Bola A com massa m e velocidade $v_{A,x0}$

Bola B com massa m e velocidade 0

momento $P_x = mv_{A,x0}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}m{v_{A,x0}}^2$

Depois da colisão:

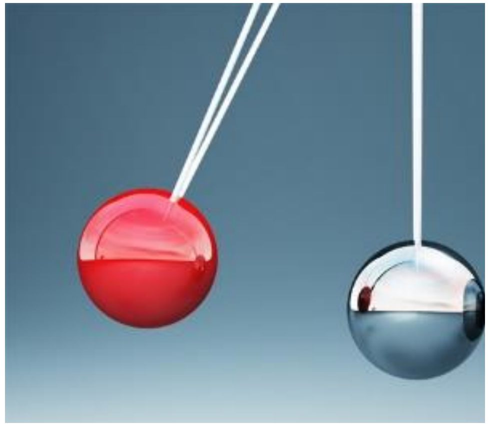
Bola A com massa m e velocidade $v_{A,x1}$

Bola B com massa m e velocidade $v_{B,x1}$

momento $P_x = mv_{A,x1} + mv_{B,x1}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}m{v_{A,1x}}^2 + \frac{1}{2}m{v_{B,1x}}^2$

Considere primeiro o sistema com 2 bolas



Antes da colisão:

momento $P_x = mv_{A,x0}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}m{v_{A,x0}}^2$

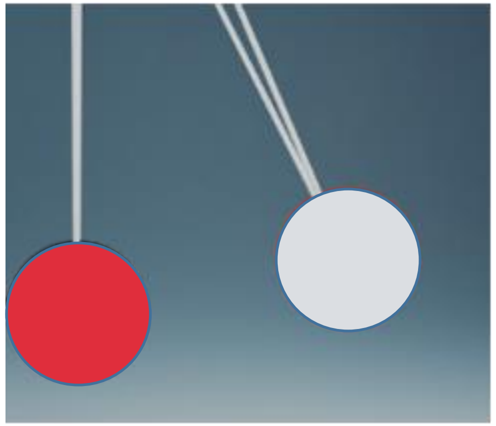
Depois da colisão:

momento $P_x = mv_{A,x1} + mv_{B,x1}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}m{v_{A,x1}}^2 + \frac{1}{2}m{v_{B,x1}}^2$

Conservação de momento e energia

$$\begin{cases} mv_{A,x0} = mv_{A,x1} + mv_{B,x1} \\ \frac{1}{2}m{v_{A,x0}}^2 = \frac{1}{2}m{v_{A,x1}}^2 + \frac{1}{2}m{v_{B,x1}}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{A,x0} = v_{A,x1} + v_{B,x1} \\ {v_{A,x0}}^2 = {v_{A,x1}}^2 + {v_{B,x1}}^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} v_{A,x0} - v_{A,x1} = v_{B,x1} \\ {v_{A,x0}}^2 - {v_{A,x1}}^2 = {v_{B,x1}}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{A,x0} - v_{A,x1} = v_{B,x1} \\ (v_{A,x0} + v_{A,x1})(v_{A,x0} - v_{A,x1}) = {v_{B,x1}}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{A,x0} - v_{A,x1} = v_{B,x1} \\ v_{A,x0} + v_{A,x1} = v_{B,x1} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{A,x1} = 0 \\ v_{B,x1} = v_{A,x0} \end{cases}$$

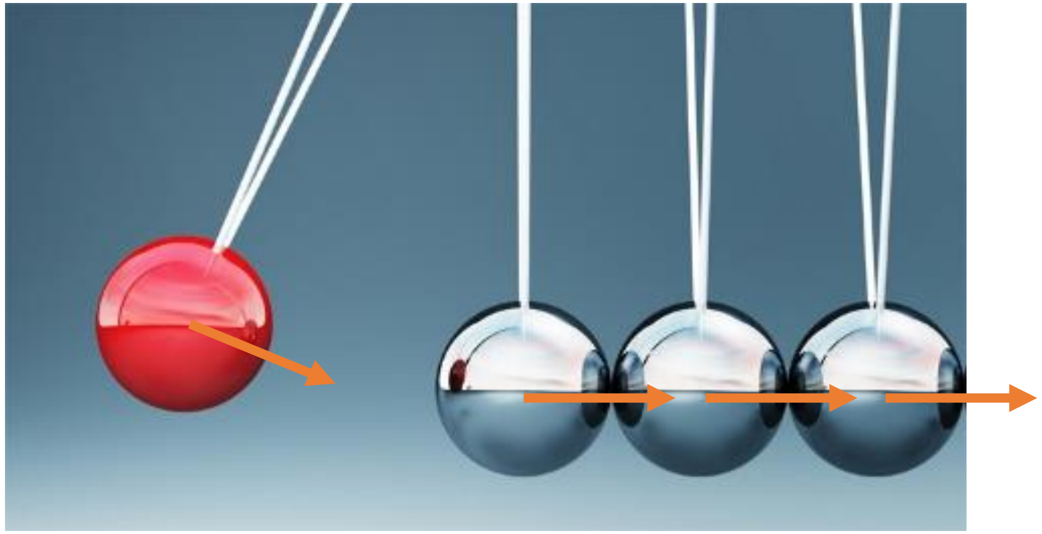
todo o momento transferido à segunda bola!

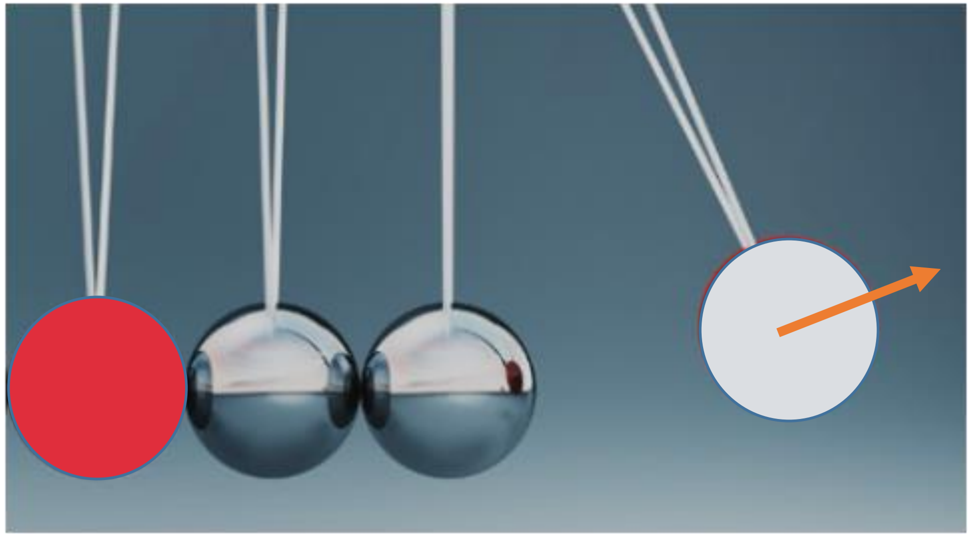
Ex. **Colisão Elástica: Pêndulo de Newton**

Agora considere o sistema com 4 bolas

Conservação de momento e energia cinética

momento transferida a cada bola em sucessão

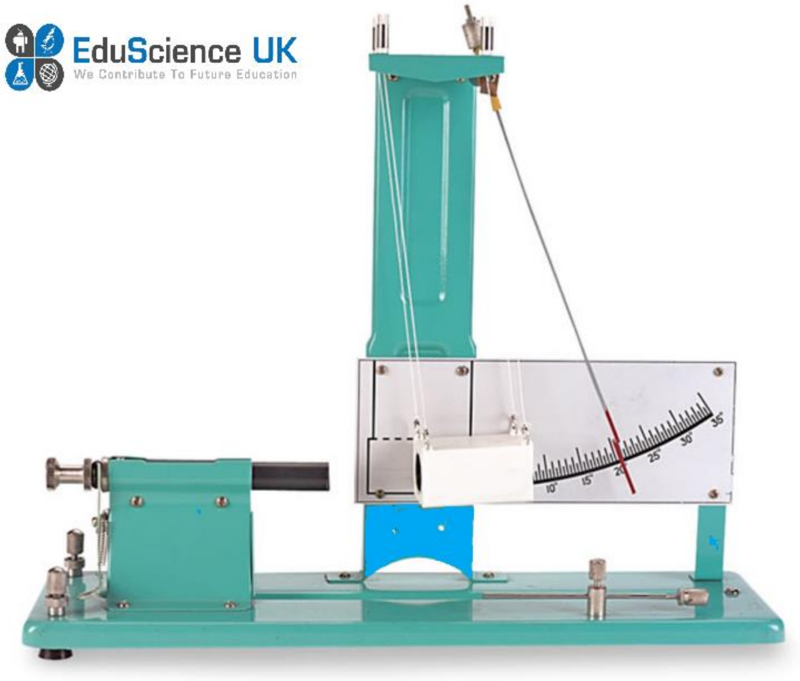


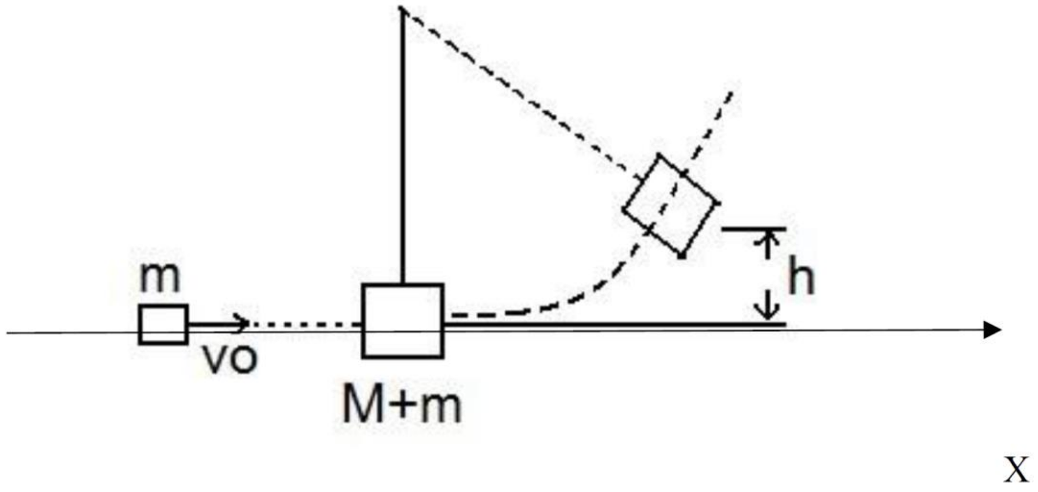


https://youtu.be/YB7KUGdP7wI?si=YONPIzAciVjMzHNW

Ex: **Colisão Inelástica: Pêndulo balístico**

medição da velocidade de uma bala





1. Colisão bala – bloco

2. Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura *h*

Pêndulo balístico: medição da velocidade de uma bala

1. Colisão bala – bloco

Antes da colisão:

momento da bala $m_{bala}\, v_{bala,x}$

momento do bloco 0

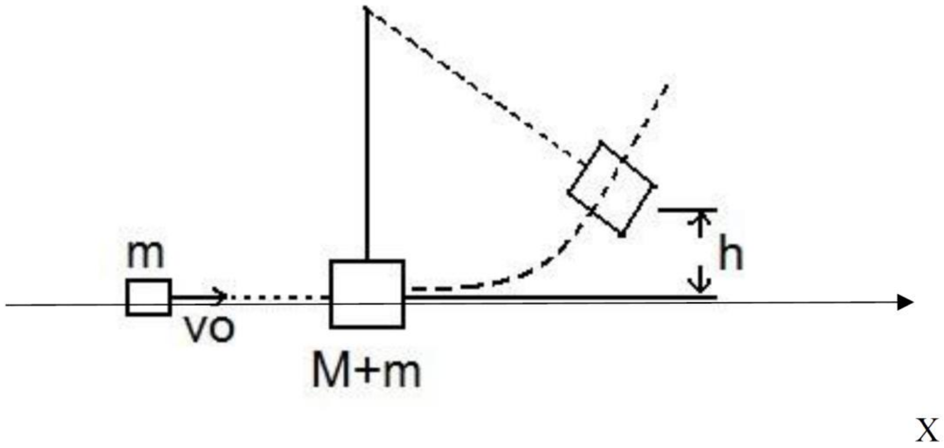
Depois da colisão:

momento bala-bloco $(m_{bala}+M_{bloco})V$

Conservação do momento

$$m_{bala}\, v_{bala,x} = (m_{bala}+M_{bloco})V$$

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala} + M_{bloco})}{m_{bala}} V$$



Note: porque os dois corpos vão juntos depois da colisão, só temos 1 incógnita

<u>Não é preciso analisar a energia</u>

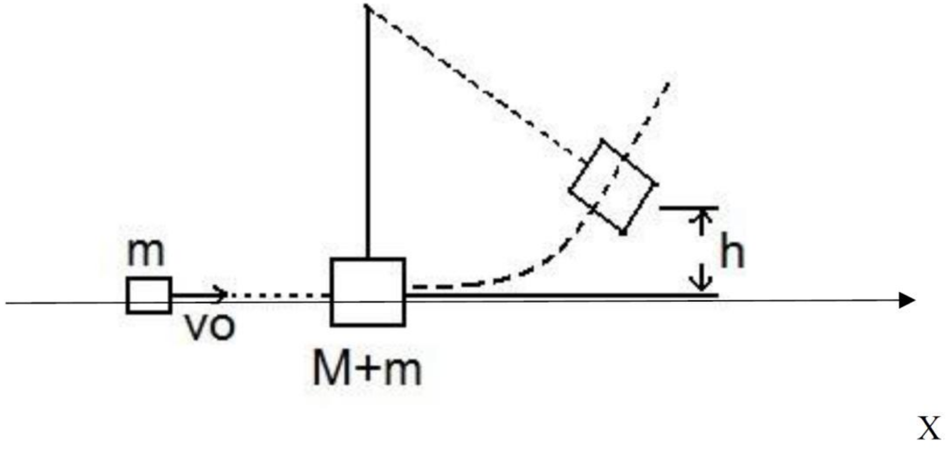
Pêndulo balístico: medição da velocidade de uma bala

1. Colisão bala – bloco

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala} + M_{bloco})}{m_{bala}} V$$

2. **Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura *h***

Os dois corpos juntos sobem como um pêndulo até à altura h, transformando energia cinética em energia potencial



Energia mecânica:

- No ponto mais baixo do pêndulo $\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 + 0$
- No ponto a altura *h* $0 + (m_{bala} + M_{bloco})\ g\ h.$

Pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 = (m_{bala} + M_{bloco})\ g\ h$$

2. **Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura** *h*

Os dois corpos juntos sobem como um pêndulo até à altura h, transformando energia cinética em energia potencial

Pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}(m_{bala}+M_{bloco})V^2 = (m_{bala}+M_{bloco})\ g\ h$$

$$\Rightarrow\ V^2 = 2\ \ g\ h$$

e de passo 1:

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}}V$$

$$\Rightarrow\ v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}}\sqrt{2\ \ g\ h}$$

Problema: Mostre que a colisão é inelástica.