Departamento de Física
Universidade de Aveiro

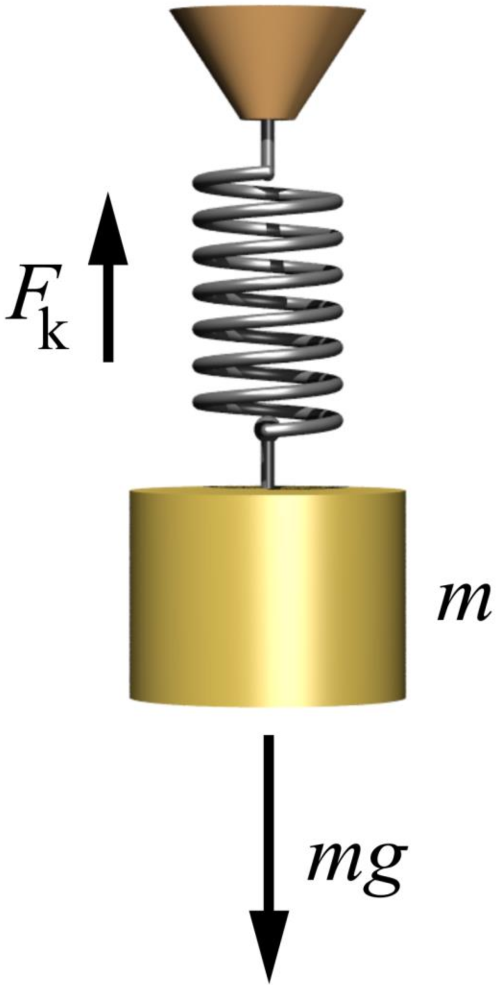
# Modelação de Sistemas Físicos

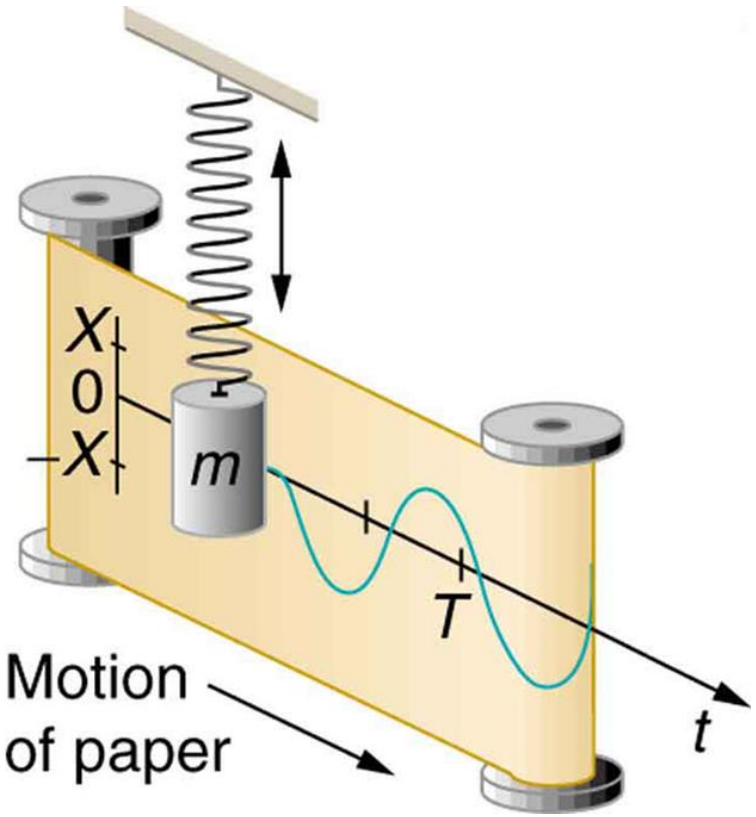
## Cap. 5 Oscilações

Sumário:
Oscilador Harmónico Simples
Polinómios de Lagrange
Osciladores amortecidos e forçados
Osciladores não harmónicos e Caos
Método de Runge-Kutta da 4ª ordem.

Bibliografia:
Serway, cap. 15

# Sistema mola-massa




https://youtube.com/shorts/I_Wscia8h9I?si=iTJnl2BxufBdt3F4


https://youtu.be/FJBPNJR2QJU?si=vlNjxG2NFke1-cy9&t=165 (2’ 45’’)

**O que podemos observar? (Medições)**

- A massa executa oscilações periódicas
- O período $T$ é proporcional à raiz quadrada da massa $M$ $\qquad T = C\sqrt{M}$
- O período é mais curto para molas mais fortes

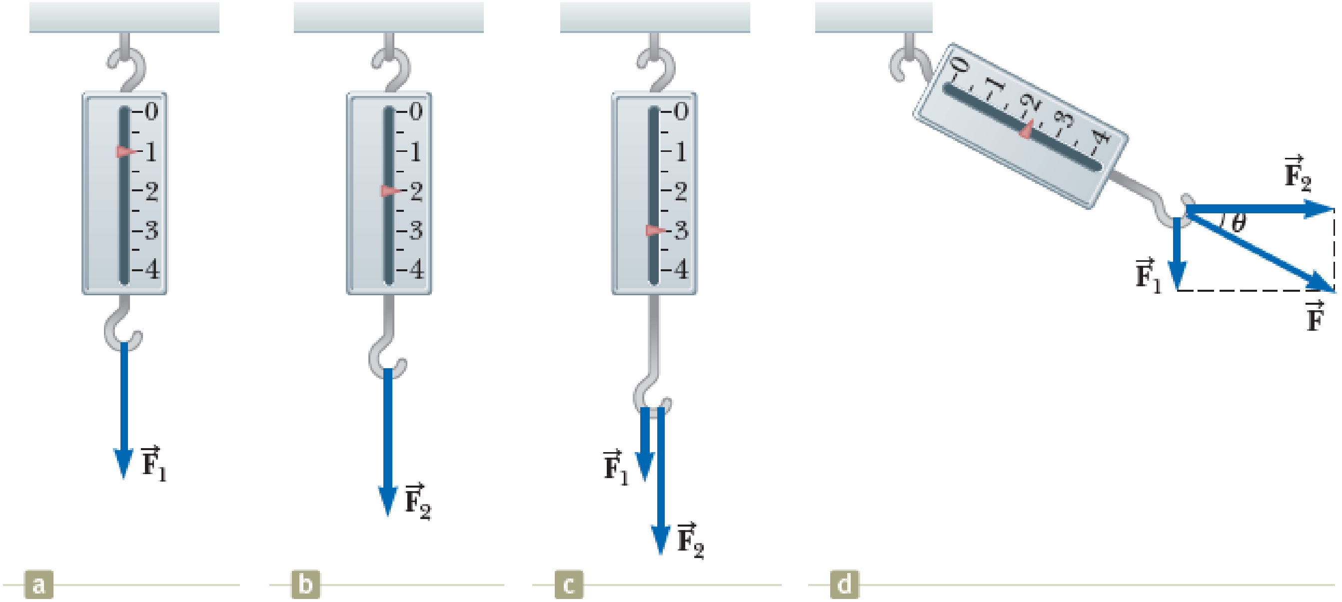
# Lei de Hooke

A extensão de uma mola (a partir do ponto de equilíbrio) é proporcional à força aplicada

⇔ A força gerada pela mola é proporcional ao deslocamento do ponto de equilíbrio

Aplica-se à deformação elástica de vários corpos ⇒ **força elástica**

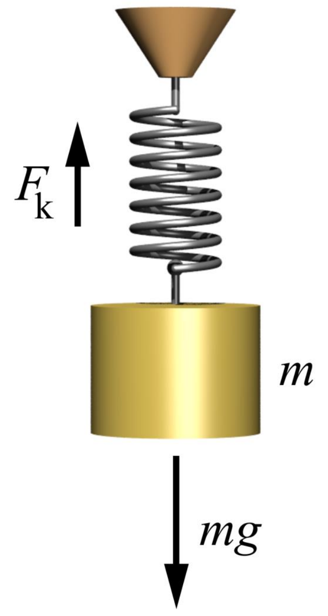
Robert Hooke 1635-1703




$$\begin{cases} F_x = -k\ x \\ F_y = -k\ y \\ F_z = -k\ z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = -k\vec{r}$$

# Sistema mola-massa

A 1D (segundo OX)




Por medições:

$$T = C\sqrt{m}$$
$$F_x = -k\,x$$

Com $F_x = -k\,x \quad \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x\ a_x$

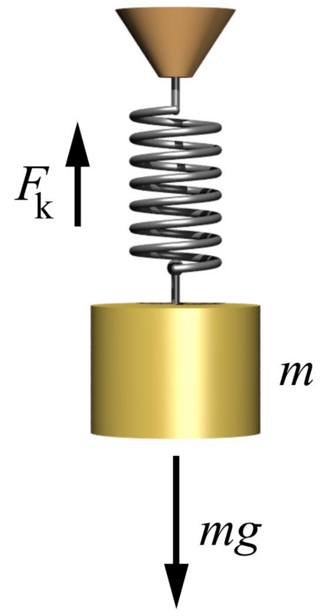
ou seja

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

equação diferencial

## Sistema mola-massa

Com $F_x = -k\,x$ equação diferencial $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x$




Recordar as propriedades das funções sinusoidais: $\dfrac{d^2}{x^2}\cos ax = -a^2\cos ax$ etc.

## Solução:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \phi\right) \end{cases}$$

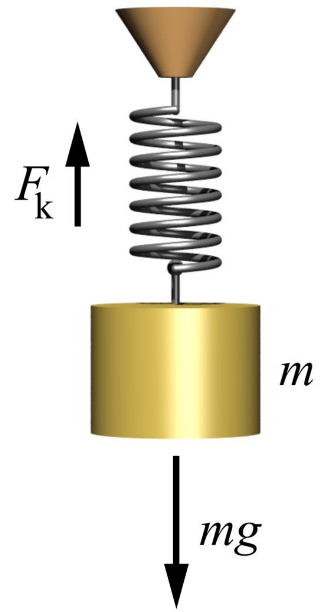
ou

$$\begin{cases} x(t) = A\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \varphi\right) \end{cases}$$

<u>SOLUÇÕES IGUAIS</u>, só a expressão matemática é diferente $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\,\mathrm{sen}\,(x)$

## Sistema mola massa    Soluções

$$a_x = -\frac{k}{m}x \quad \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) \end{cases}$$




Outras expressões matemáticas que representam a mesma solução:

$$\begin{cases} x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$$

Qualquer destas 3 expressões matemáticas concordam com a equação fundamental da dinâmica, na forma:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

# Pêndulo

Força de gravidade $\vec{P} = -mg\hat{j}$

Componente ao longo do arco $F = -mg\ \sin\theta$

Distância ao longo do arco $s = L\theta$

Então **aceleração**

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$

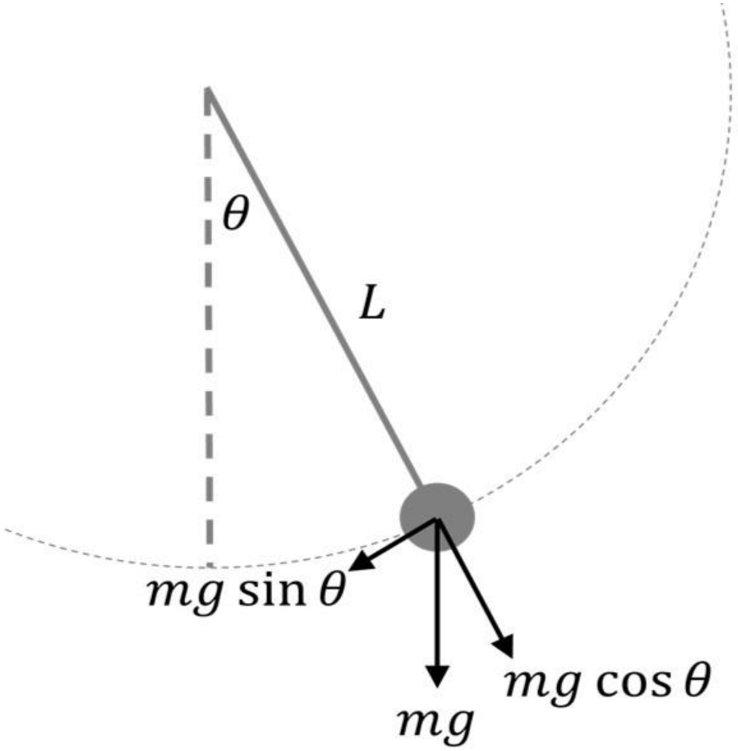
Agora, para $\theta$ pequeno, $\sin\theta \approx \theta$

ou seja

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

equação diferencial

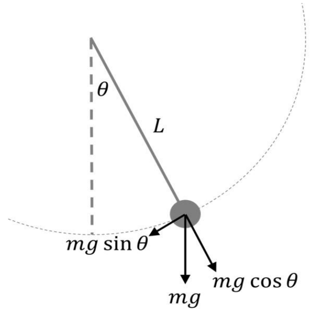
da mesma forma que a equação para o sistema mola-massa!




Movimento restrito ao arco ($L$ é fixo)

Um sistema que obedece uma equações desta forma chama-se um **Osciladores Harmonico Simples**

## Pêndulo Soluções




As soluções têm a mesma forma que para o sistema mola-massa:

$$a_\theta = -\frac{g}{L}\theta \Longrightarrow \begin{cases} \theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi\right) \\ v_\theta(t) = -A\sqrt{\frac{g}{L}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \theta(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \varphi\right), \\ v_\theta(t) = A\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \varphi\right) \end{cases}$$

Ou:

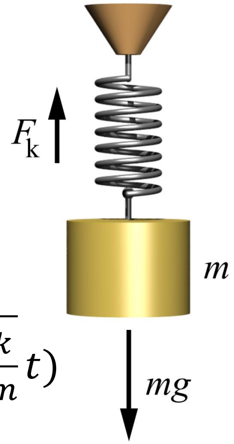
$$\begin{cases} \theta(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + D\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \\ v_\theta(t) = -C\sqrt{\frac{g}{L}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + D\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \end{cases}$$

Qualquer destas 3 expressões matemáticas concordam com a equação fundamental da dinâmica, na forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

**Soluções**

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\,\mathrm{sen}(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \\ v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \end{cases}$$



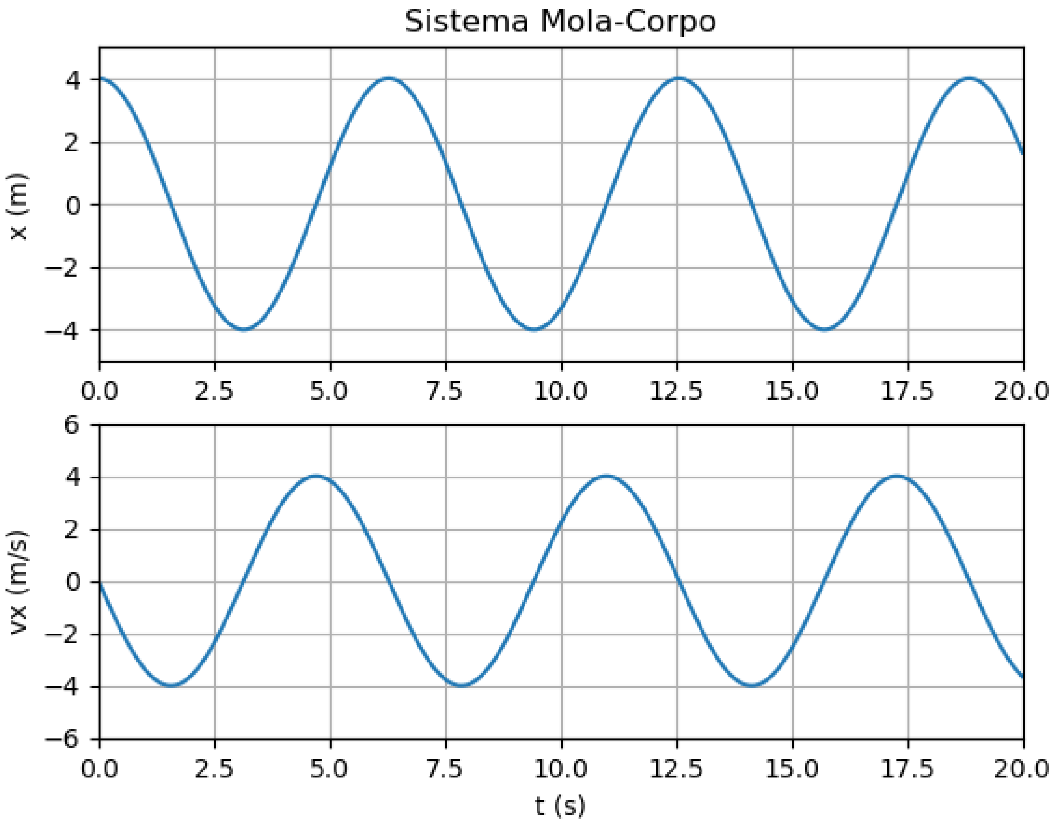

As constantes $A, \phi$ ou $A, \varphi$ ou $C, D$ dependem das condições iniciais: $x(t=0)$ e $v_x(t=0)$

<u>Ex:</u>

$x(t=0) = 4$ m

$v_x(t=0) = 0$

$\sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s




Qualquer das três expressões matemáticas:

**A solução é determinada por 2 constantes**

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right) \end{cases}$$

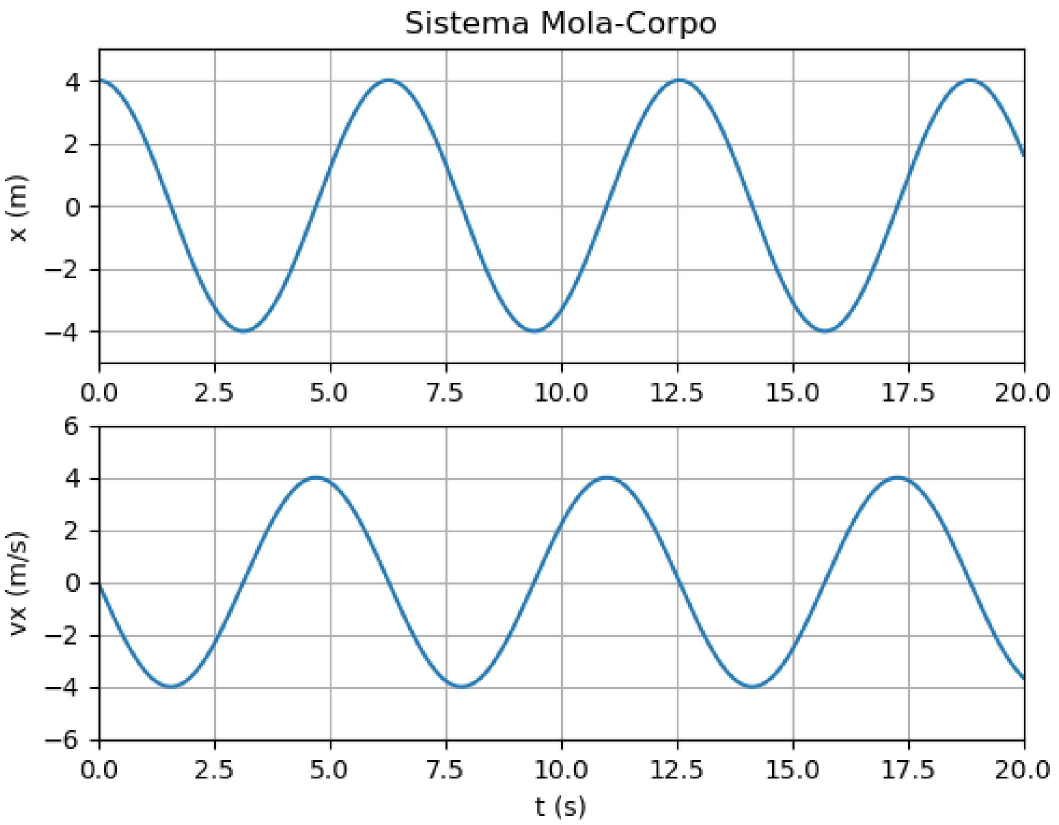
Determine $A$ e $\phi$

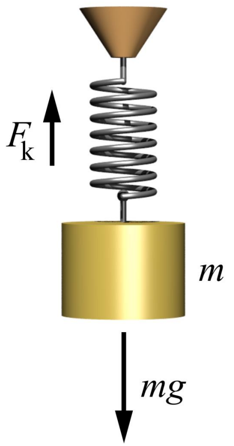
$$\begin{cases} x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right) \end{cases}$$

Determine $A$ e $\varphi$

$$\begin{cases} x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\,\mathrm{sen}(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) \\ v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) \end{cases}$$

Determine $C$ e $D$

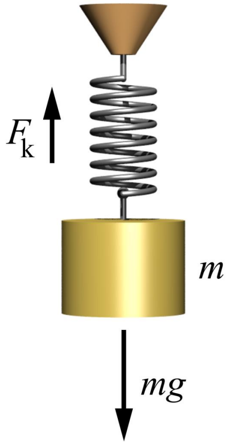


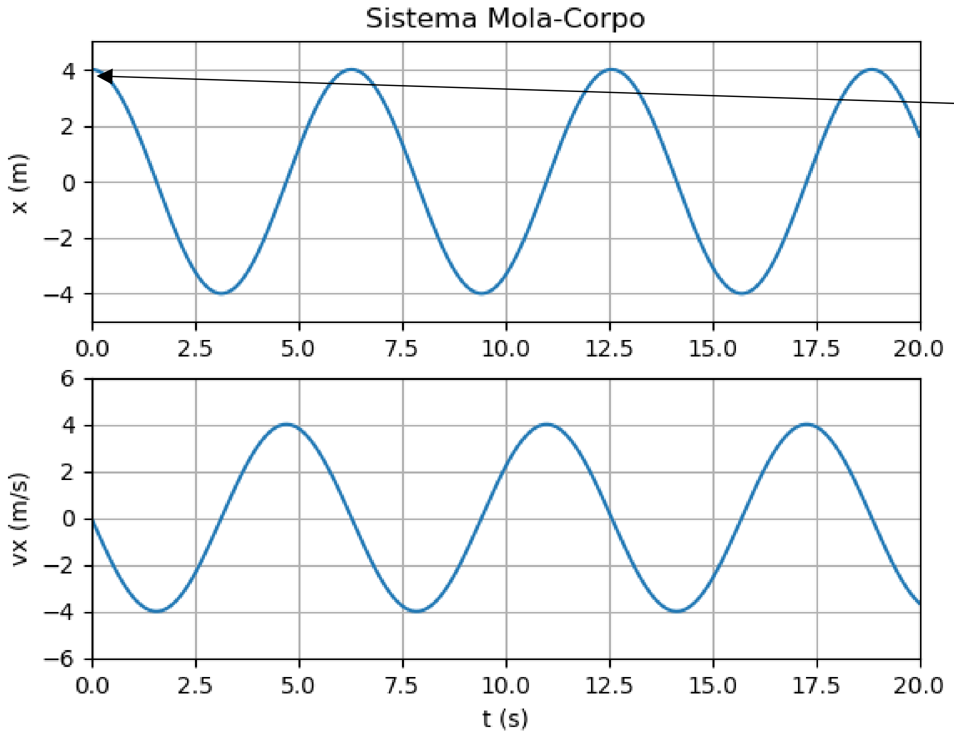

Com:
$x(t=0) = 4$ m
$v_x(t=0) = 0$
$\sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

As constantes $A,\ \phi$ ou A, $\varphi$ ou $C, D$
dependem das condições iniciais: $x(t=0)$ e $v_x(t=0)$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \phi\right) \end{cases}$$




# Determine $A$ e $\phi$




$A$ : Amplitude

$\phi$ : Fase inicial

Condições iniciais

$$x(0) = x_0 = A\cos(\,\phi\,)$$

$$v_x(0) = v_{x,0} = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\,\phi\,)$$

Resolve para $A$ e $\phi$ em termos de $x_0$ e $v_{x,0}$

**Problema**

Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que $k$ é a constante elástica da mola, num corpo de massa $m$. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

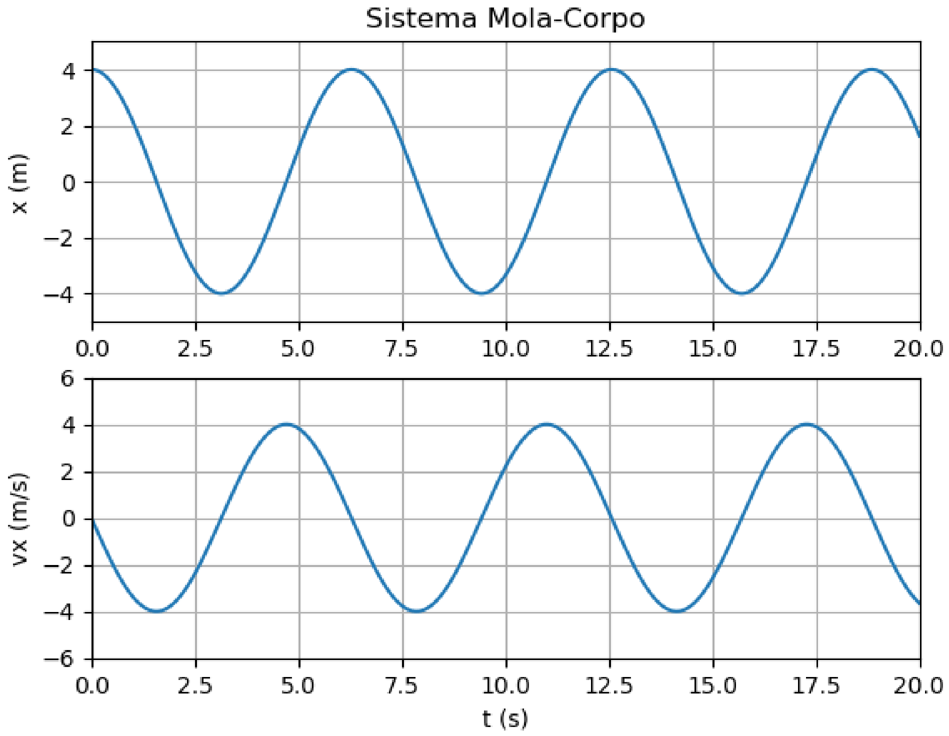
$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema, em que $A$ e $\phi$ são constantes.

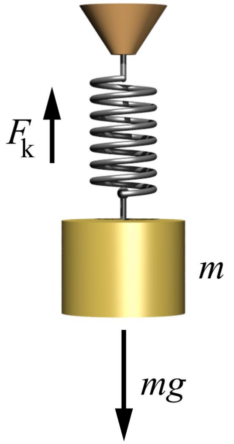
Calcule $A$ e $\phi$ , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\phi\right) \end{cases}$$

$A$ : Amplitude

$\phi$: fase inicial




## Período $T$

$$x(t+T) = x(t)$$

$$A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T)+\phi\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T)+\phi = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right)+2\pi$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi$$

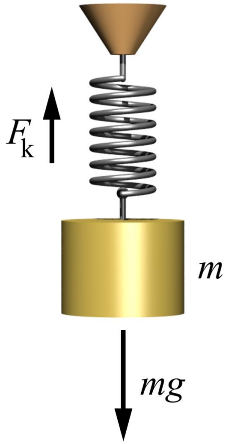
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\sqrt{m}$ de acordo com as medições

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi) \end{cases}$$

$A$ : Amplitude

$\phi$: fase inicial



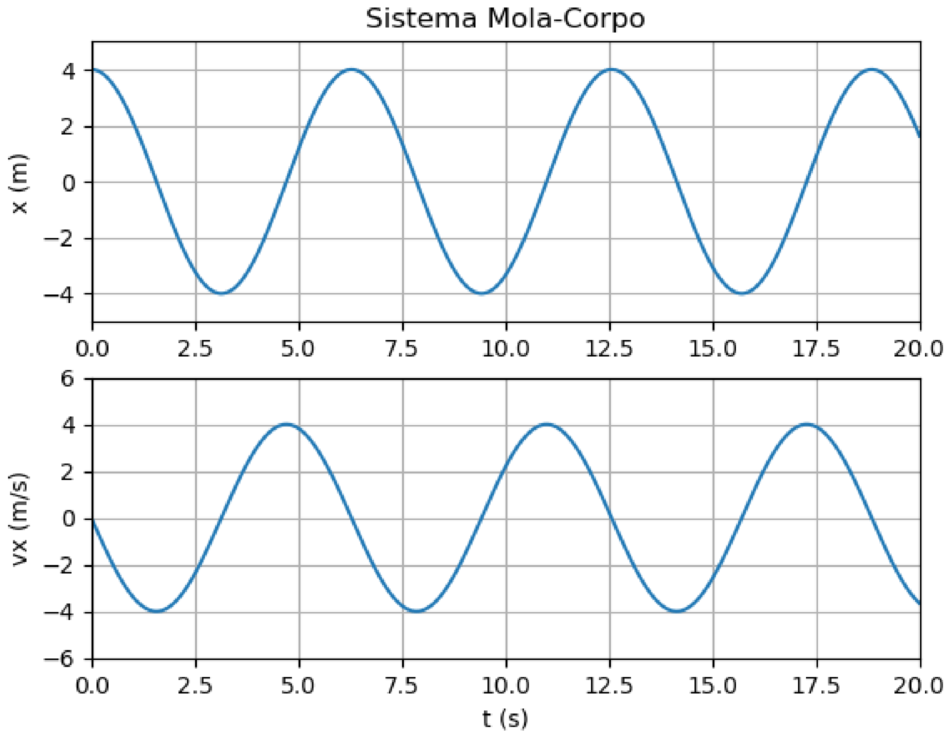

**Frequência:** número de repetições por unidade de tempo

$$f = \frac{1}{T}$$

1 repetição - leva 1 $T$

f repetições – leva 1 s $\Rightarrow$ $fT = 1$

unidade: 1/s = Hz




Como $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ou $\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$ : **frequência angular** $\omega$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# Problema: Oscilador Harmónico Simples

Um objeto de M=500g, preso a uma mola com k=8 N/m, oscila num movimento com amplitude A=10cm.

Calcule:

a) a velocidade e aceleração máximas.
b) a velocidade e aceleração quando o objeto dista 6 cm da posição de equilíbrio.
c) o tempo necessário para o objeto partir de x=0 e chegar a x=8 cm.

Formulário:

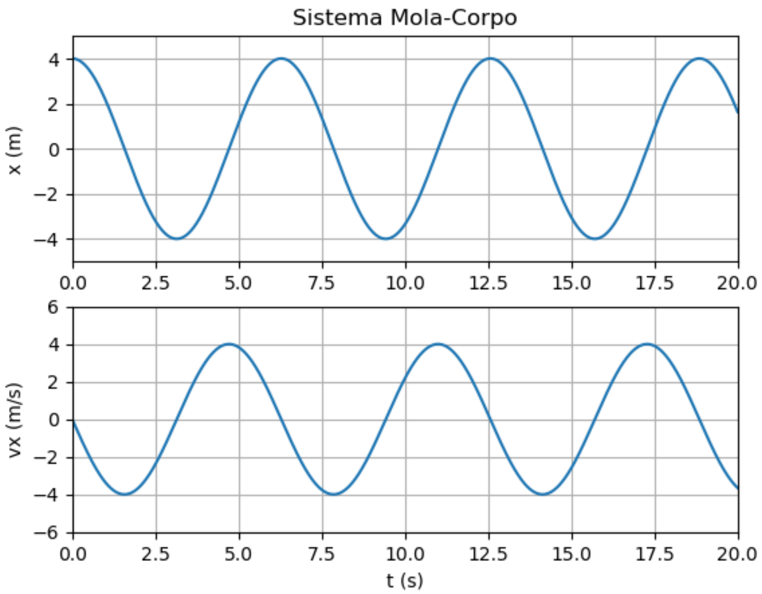
$$y(t) = A\ \cos(\omega t + \phi) \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

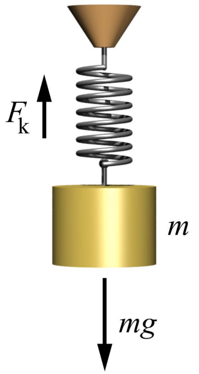
# Energia Mecânica

$F_x = -k\,x$

$F_x = -\dfrac{dE_p}{dx}$ força conservativa

$\Longrightarrow \quad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\,x^2 \qquad\qquad k = m\omega^2$




$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\,v_x^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\sin(\omega\,t + \phi) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}m\,[A\,\omega\sin(\omega\,t + \phi)]^2 + \frac{1}{2}m\omega^2[A\cos(\omega\,t + \phi\,)]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\,A^2\omega^2\sin^2(\omega\,t + \phi) + \frac{1}{2}m\,\omega^2\;A^2\cos^2(\omega\,t + \phi\,)$$

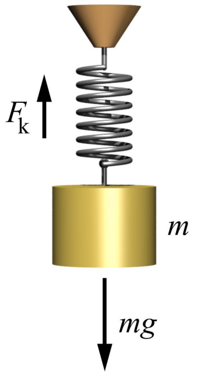
$$= \frac{1}{2}m\omega^2\,A^2[\sin^2(\omega\,t + \phi) + \cos^2(\omega\,t + \phi\,)]$$

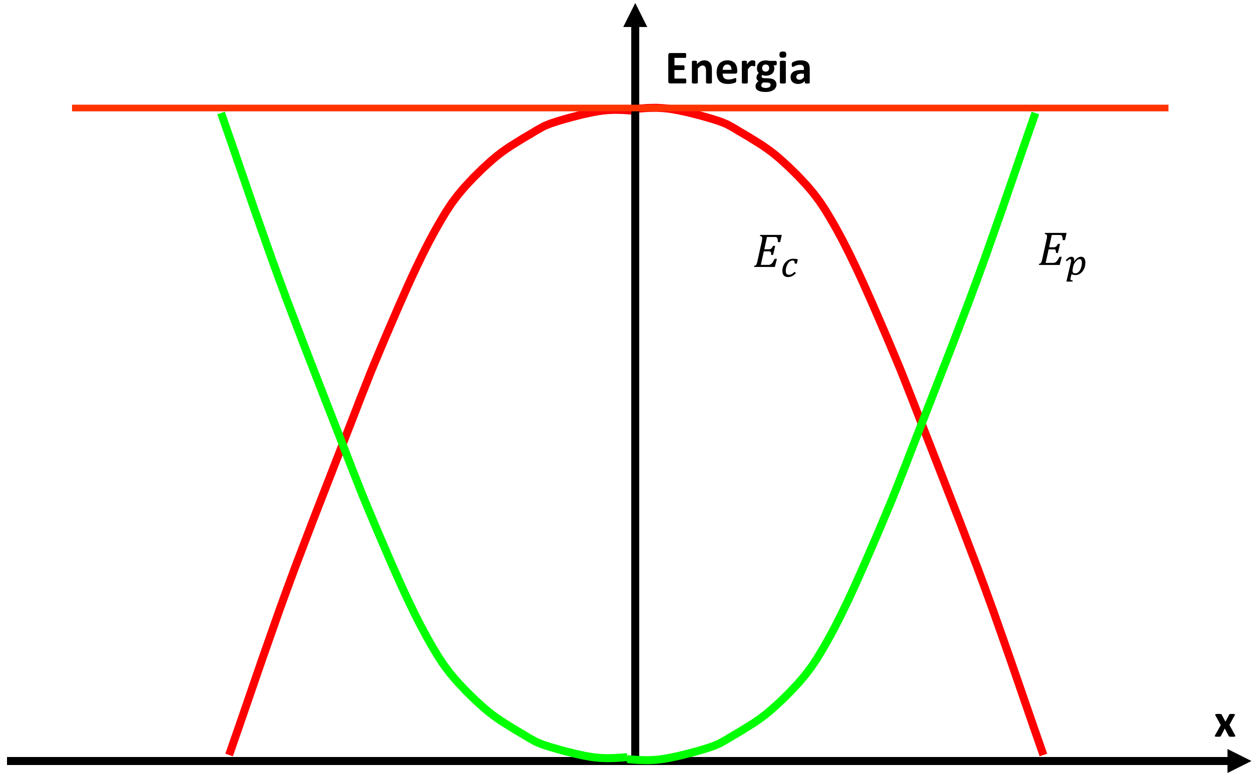
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \qquad \text{Constante}$$

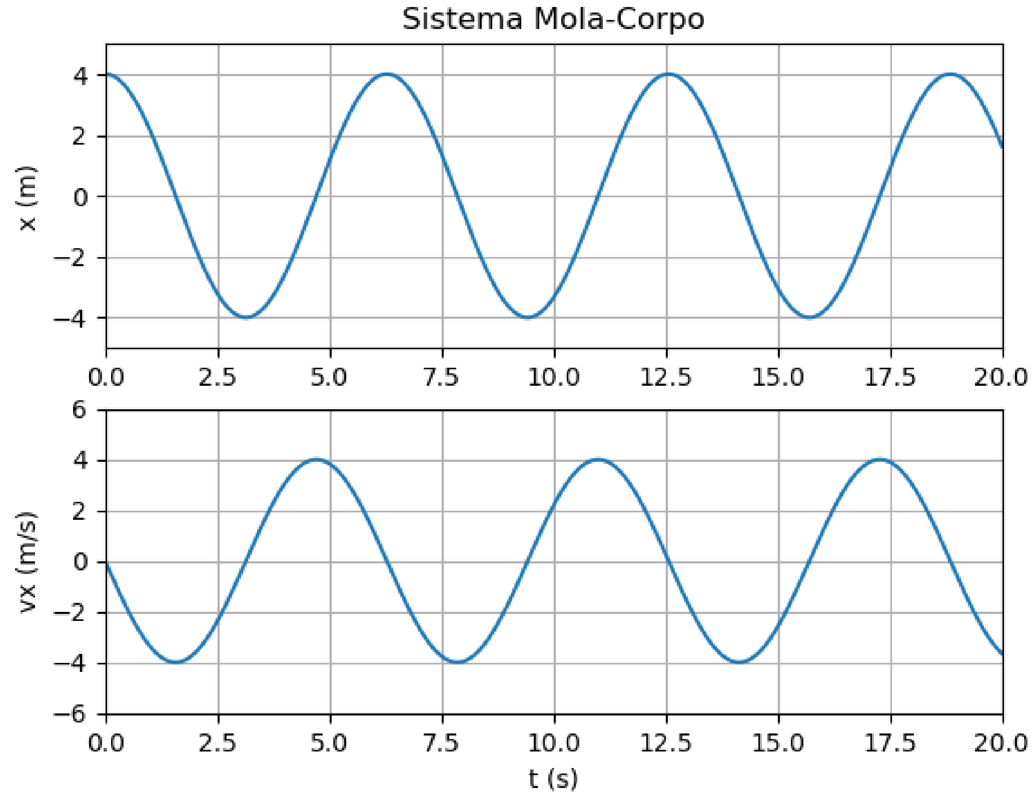
# Energia Mecânica

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2\, x^2 \quad \text{e} \quad E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2\, A^2$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\, t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega\, t + \phi) \end{cases}$$



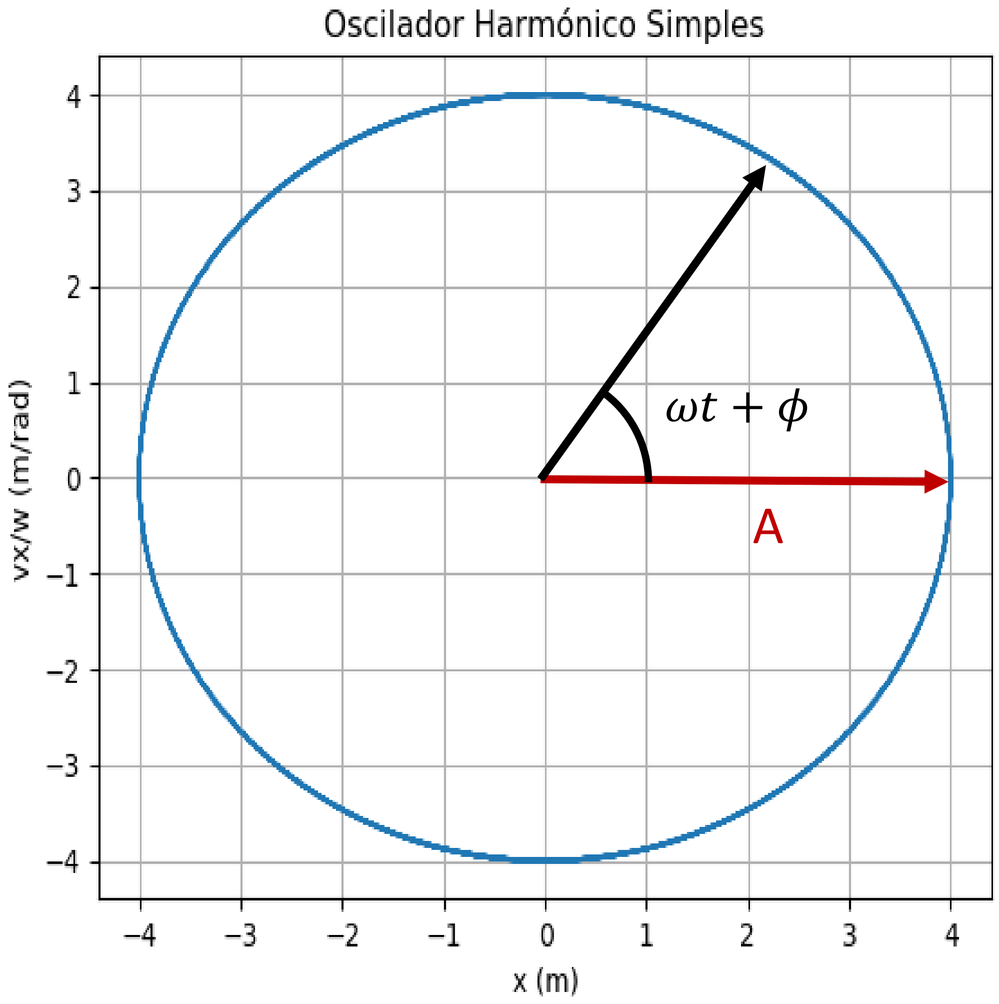

https://www.geogebra.org/m/EGg2Pvhm

## Espaço de fase $(x, v_x/\omega)$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\, t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega t + \phi) \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\, t + \phi\,) \\ \dfrac{v_x(t)}{\omega} = -A\,\sin(\omega\, t + \phi) \end{cases}$$

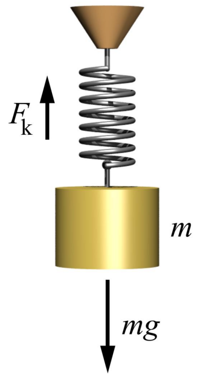
$$\Longrightarrow \qquad x^2(t) + \left(\frac{v_x(t)}{\omega}\right)^2 = A^2$$ eq. circunferência raio $A$

$\Rightarrow$ plot $\dfrac{v_x(t)}{\omega}$ vs $x$




*Q: Como está relacionado com a conservação de energia?*

Oscilador Harmónico Simples **Cálculo analítico: sumário**




Lei do movimento

$$F_x = -k\,x \implies a_x = -\frac{k}{m}x \implies \begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega\,t + \phi) \end{cases} \qquad k = m\omega^2$$

Com $x(0)$ e $v_x(0)$ calcula-se $A$ e $\phi$

Carateristicas do movimento

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Conservação de energia

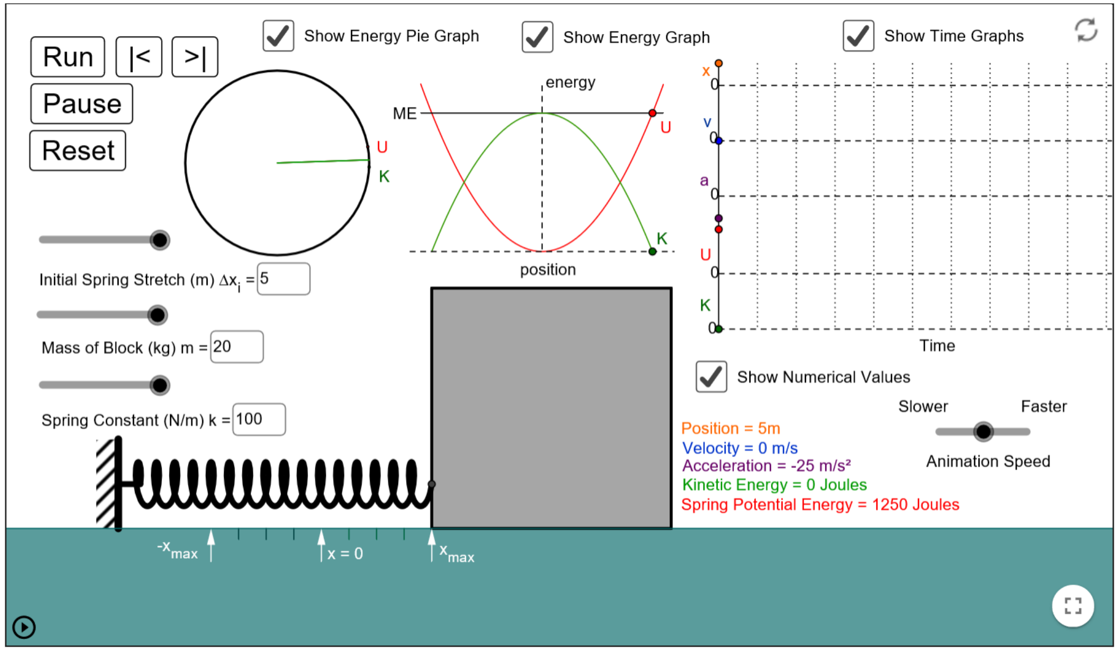
$$F_x = -k\,x = -\frac{dE_p}{dx} \implies E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\,x^2 \implies E = \frac{1}{2}m\,v_x^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \text{ conserva-se}$$

# Oscilador Harmónico Simples

## Simple Harmonic Motion: Mass on a Spring

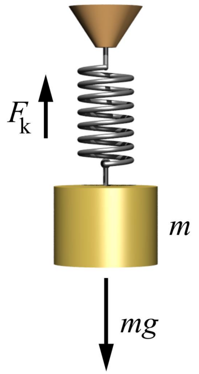
**Autor:** Alan Pacey, Tom Walsh

This simulation shows the oscillation of a box attached to a spring. Adjust the initial position of the box, the mass of the box, and the spring const
Run, Pause, Reset, and Step buttons to examine the animation. Check or uncheck boxes to view/hide various information.

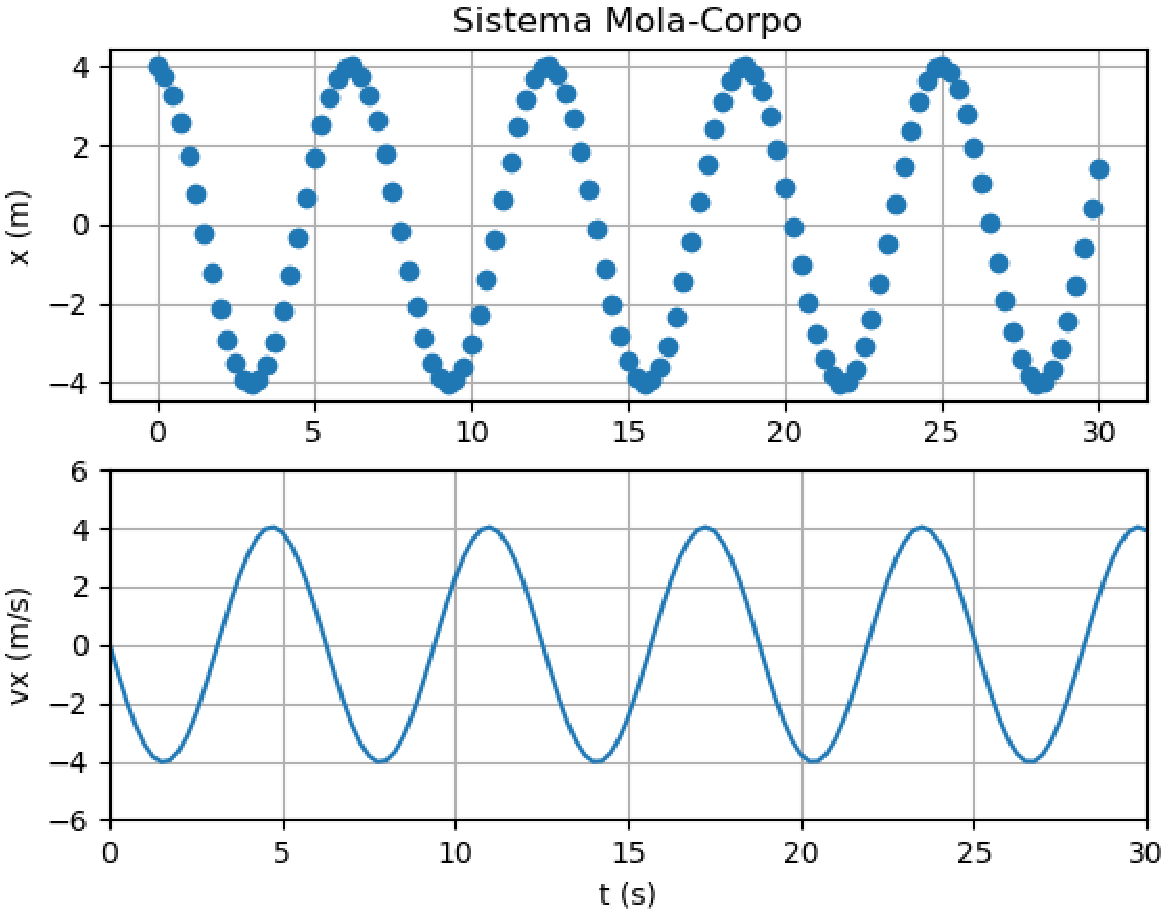



https://www.geogebra.org/m/EGg2Pvhm

# Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer

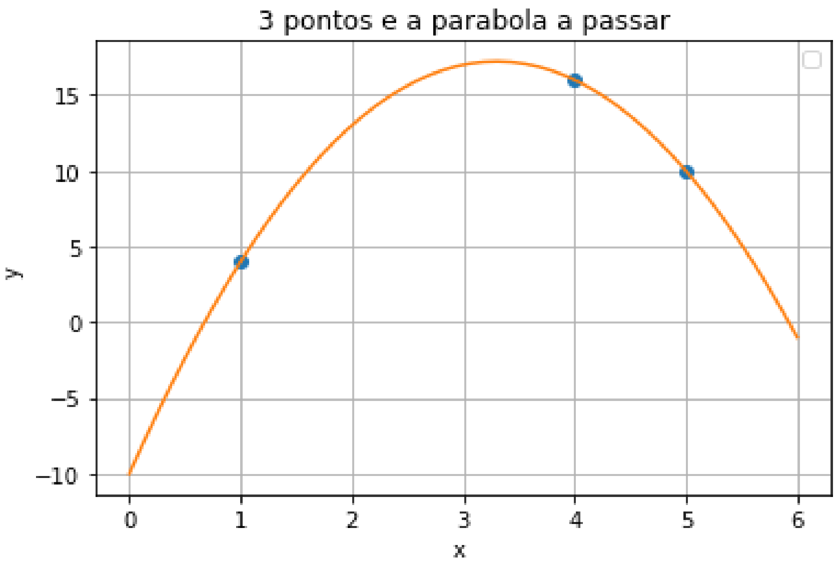



$$F_x = -k\,x \implies \begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$




Como calcular a amplitude $A$ e o período $T$? Como saber a fase $\phi$?

# Interpolação




Por três pontos $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$

há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos.

<u>Polinómio de Lagrange:</u>

$$y(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

Podemos usar o polinómio para:

- Interpolação – encontrar o valor de $y$ num ponto $x$ onde não temos dados
- Interpolação inversa – encontrar o valor de $x$ que corresponde a um determinado valor de $y$
- Cálculo de máximo e mínimos

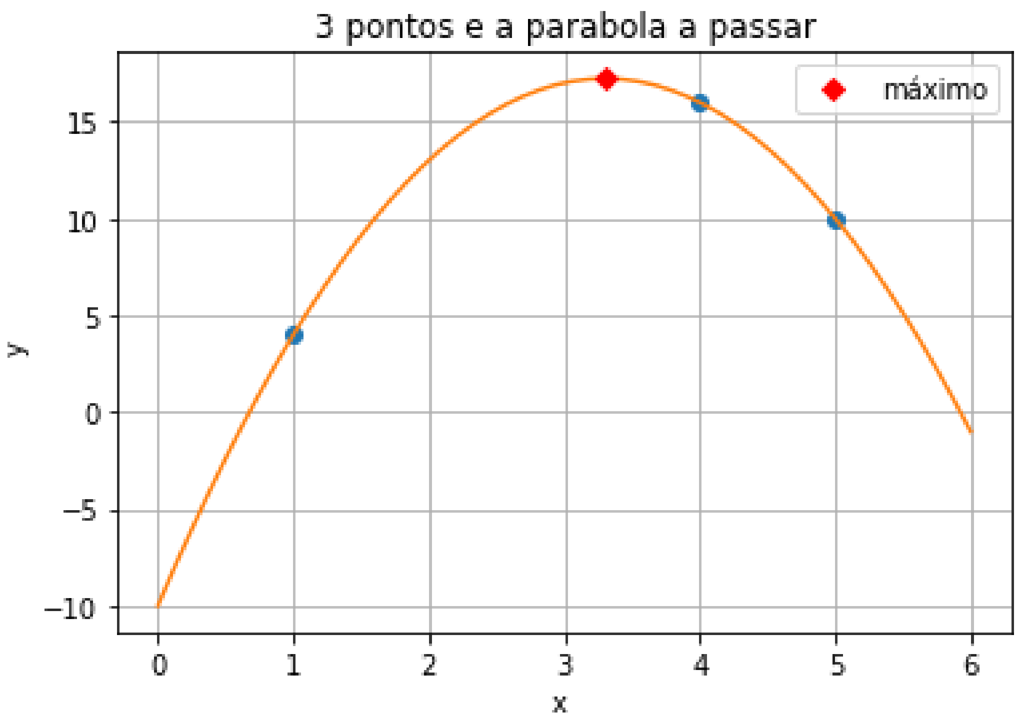
# Cálculo de máximo e mínimos

Polinómio de Lagrange

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

<u>A condição de máximo</u>, como de mínimo, é :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \textbf{no ponto } (x_m, y_{max})$$




$$\Longrightarrow \frac{[(x-x_2)+(x-x_1)]}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{[(x-x_2)+(x-x_0)]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{[(x-x_0)+(x-x_1)]}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 = 0$$

$$\Longrightarrow x_m = \frac{a0+b0+c0}{2(a+b+c)}$$

com $a = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$ b $= \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$ $c = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

$$a0 = \frac{(x_2+x_1)y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \qquad b0 = \frac{(x_2+x_0)y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \qquad c0 = \frac{(x_0+x_1)y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\Longrightarrow y_{max}(x_m) = \text{polinómio de Lagrange}$$

# Cálculo de máximo e mínimos

**O máximo ou o mínimo duma função** de pontos discretos por interpolação de Lagrange:

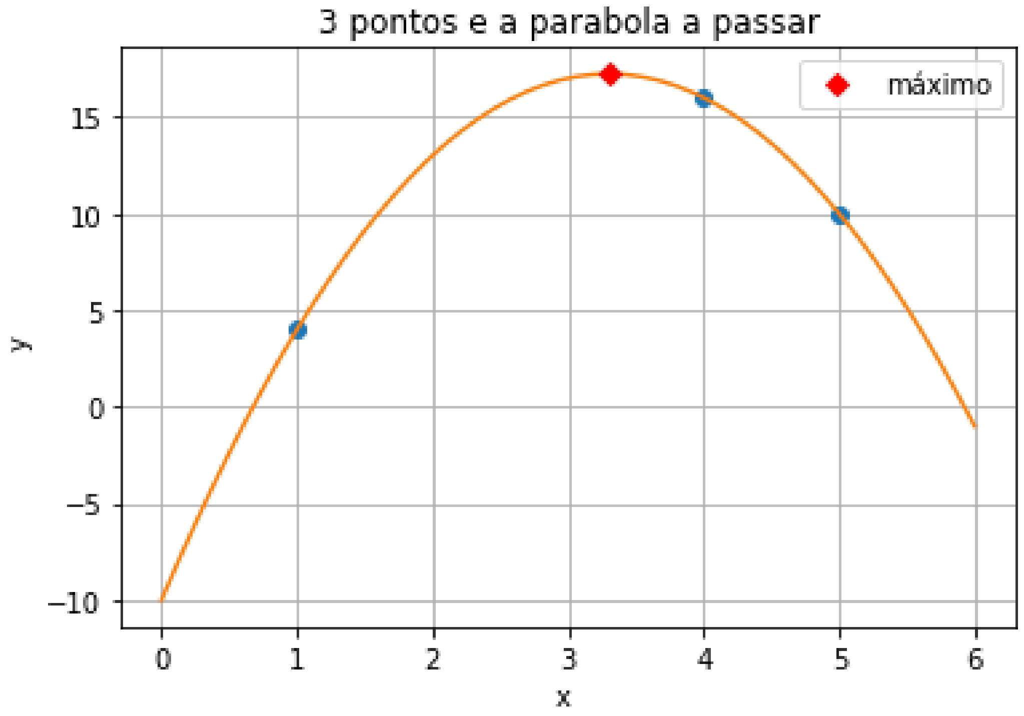
```
def maxminv(x0,x1,x2,y0,y1,y2):
    # Máximo ou mínimo usando o polinómio de Lagrange
    # Dados (input): (x0,y0), (x1,y1) e (x2,y2)
    # Resultados (output): xm, ymax
    xab=x0-x1
    xac=x0-x2
    xbc=x1-x2

    a=y0/(xab*xac)
    b=-y1/(xab*xbc)
    c=y2/(xac*xbc)

    xmla=(b+c)*x0+(a+c)*x1+(a+b)*x2
    xm=0.5*xmla/(a+b+c)

    xta=xm-x0
    xtb=xm-x1
    xtc=xm-x2

    ymax=a*xtb*xtc+b*xta*xtc+c*xta*xtb
    return xm, ymax
```



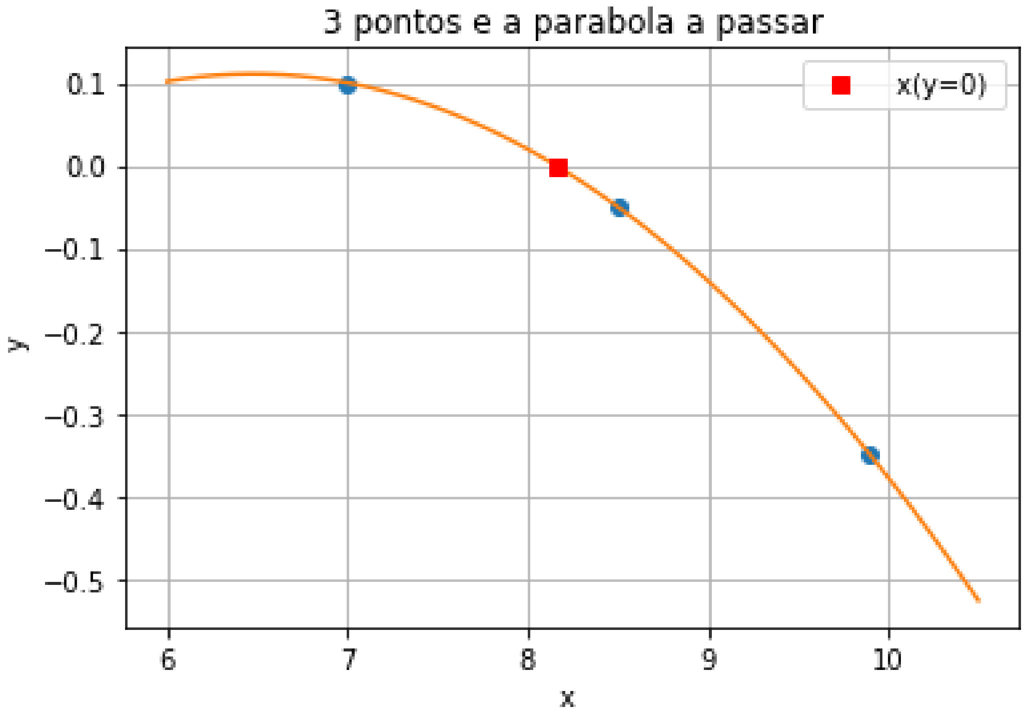
Problema: Dado um certo $y_{inp}$, qual o $x_{out}$ correspondente?

## Interpolação inversa

$$y_{inp} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

$$\Longrightarrow x_{out} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\begin{cases} a = e + f + g \\ b = e\,(x_0 + x_1) + f\,(x_0 + x_2) + g\,(x_1 + x_2) \\ c = \; e\,x_0 x_1 + f\,x_0 x_2 + g\,x_1 x_2 \; - \; y_{inp} \\ e = \dfrac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} \\ f = \dfrac{y_1}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)} \\ g = \dfrac{y_0}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)} \end{cases}$$



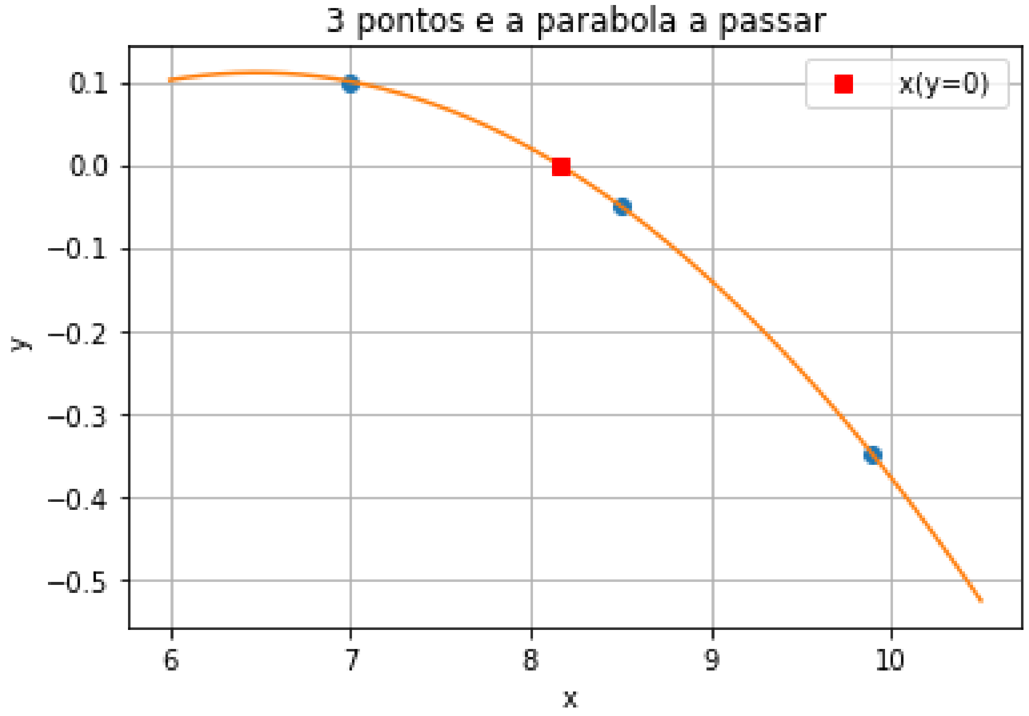
# Interpolação inversa

Dado um certo $y_{inp}$, qual o $x_{out}$ correspondente?

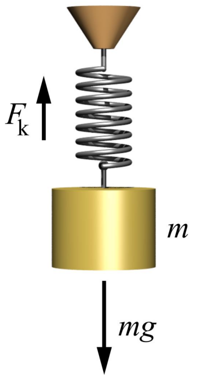
$$x_{out} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

```
def intlaginvv(yinp,xm1,xm2,xm3,ym1,ym2,ym3):
    # interpolação inversa usando o polinómio de Lagrange
    # Dados (input): yinp, (x0,y0), (x1,y1), (x2,y2)
    # Resultados (output): xout,  yout
    xab=xm1-xm2
    xac=xm1-xm3
    xbc=xm2-xm3
    a=ym1/(xab*xac)
    b=-ym2/(xab*xbc)
    c=ym3/(xac*xbc)
    am=a+b+c
    bm=a*(xm2+xm3)+b*(xm1+xm3)+c*(xm1+xm2)
    cm=a*xm2*xm3+b*xm1*xm3+c*xm1*xm2-yinp
    xout=(bm+np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)
    if xm3 > xm1 and (xout < xm1 or xout > xm3):
        xout=(bm-np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)
    if xm1 > xm3 and (xout < xm3 or xout > xm1):
        xout=(bm-np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)

    xta=xout-xm1
    xtb=xout-xm2
    xtc=xout-xm3
    yout=a*xtb*xtc+b*xta*xtc+c*xta*xtb
    return xout, yout
```

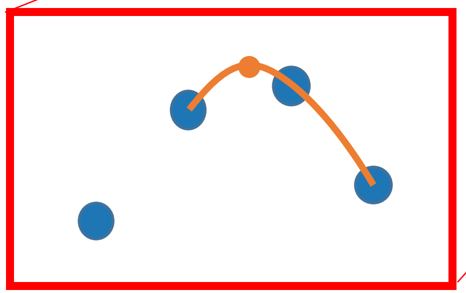


## Oscilador Harmónico Simples Cálculo Numérico: Interpolação

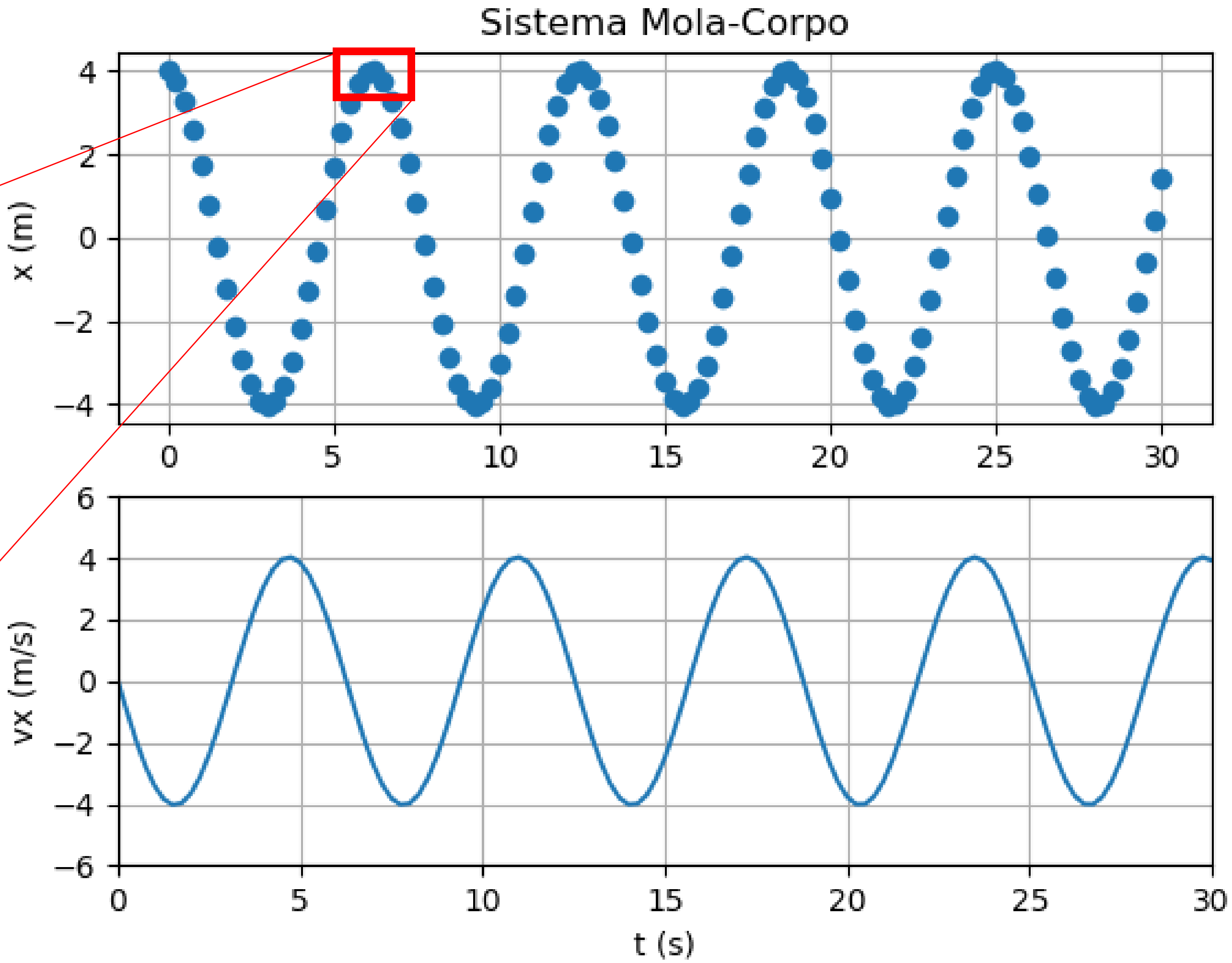



$$F_x = -k\,x \;\Longrightarrow\; \begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

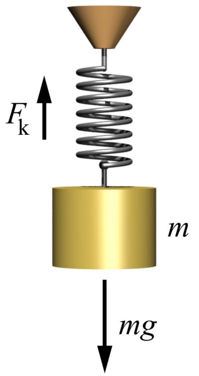
Como calcular amplitude $A$?



$$A = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$



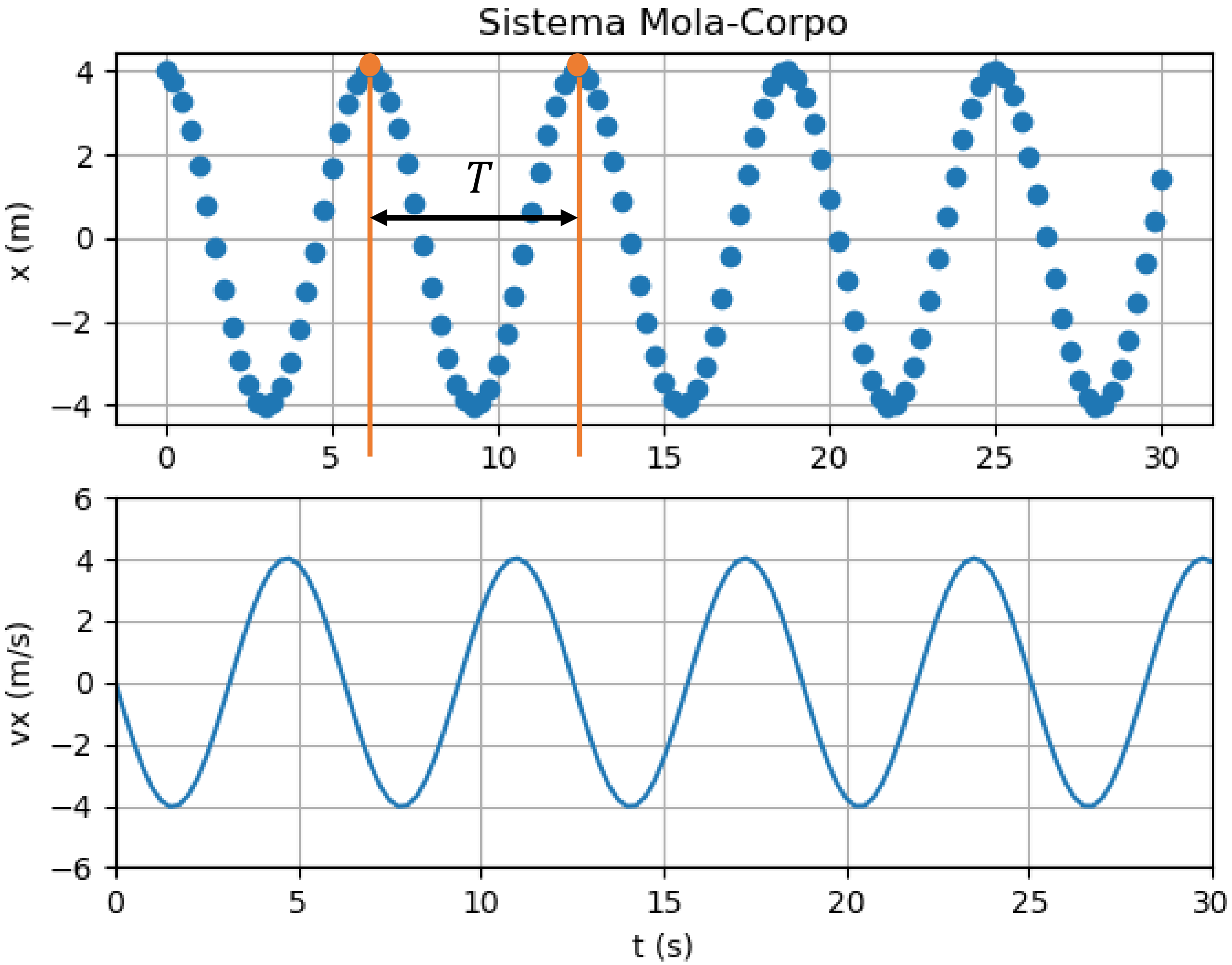
## Oscilador Harmónico Simples Cálculo Numérico: Interpolação



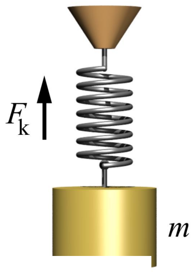

$$F_x = -k\,x \implies \begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

Como calcular o período $T$?

$$T = t_{max2} - t_{max1}$$



## Oscilador Harmónico Simples Cálculo Numérico: Interpolação




$$F_x = -k\,x \;\Longrightarrow\; \begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

# Como calcular fase $\phi$?

$x(t) = A\cos(\omega\, t + \phi\,)$
máximo quando $\omega t + \phi = 2\pi, 4\pi, \ldots$

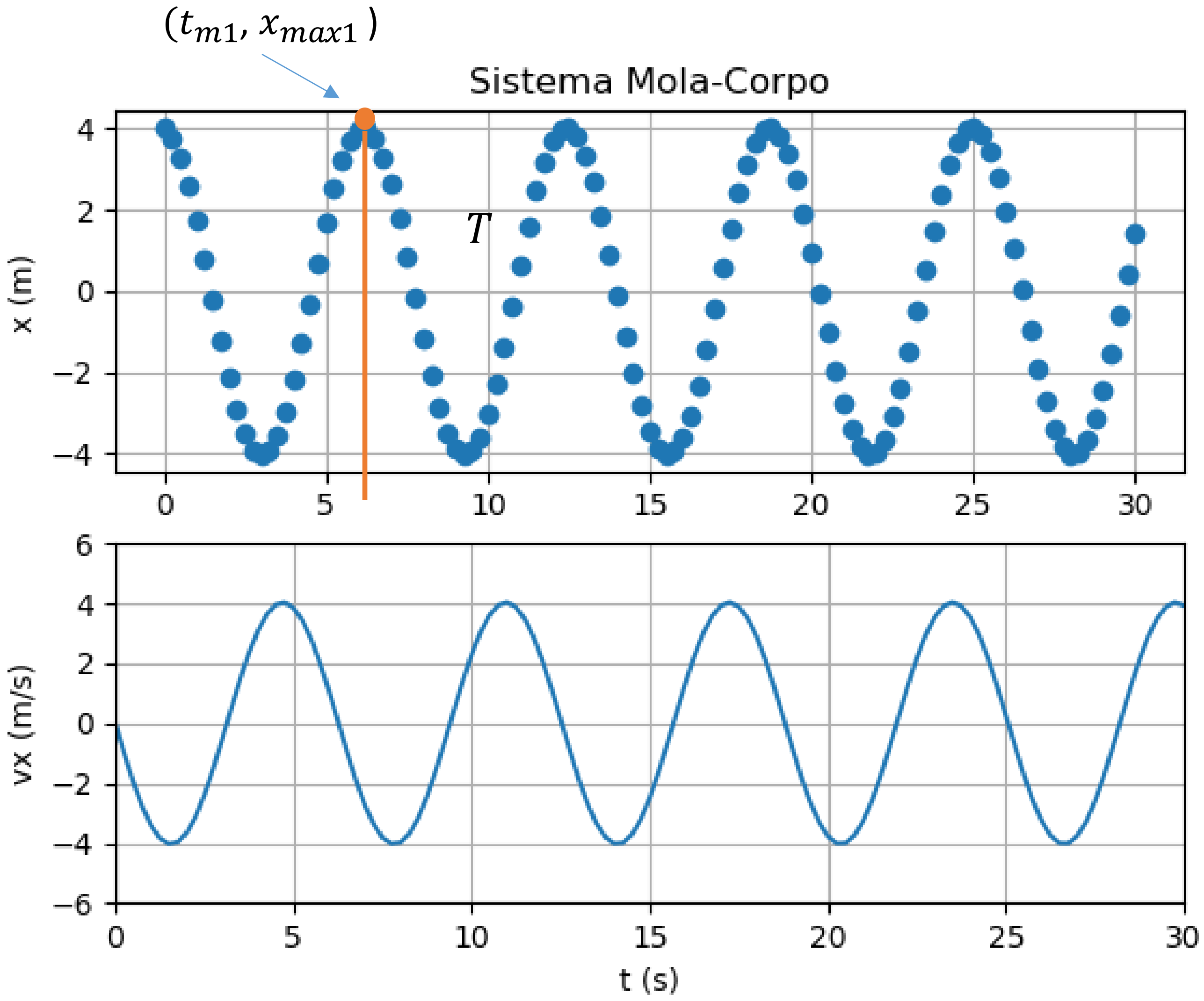
primeiro máximo $x_{max1}$ $(t_{m1})$ quando

$$\omega t_{m1} + \phi = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

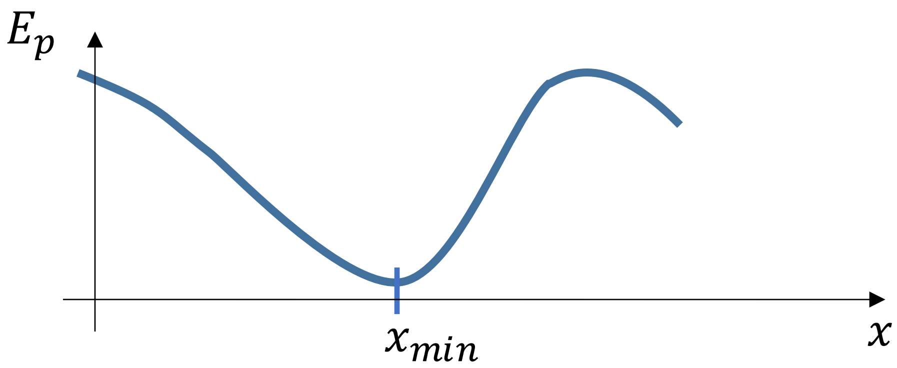
$$\Rightarrow \quad \phi = 2\pi\left(1 - \frac{t_{m1}}{T}\right)$$

Se encontrar $\phi > \pi$, subtrair $2\pi$: $\phi = -2\pi\frac{t_{m1}}{T}$



# Importância do oscilador harmónico

Energia potencial qualquer, com mínimo em $x_{min}$




Expansão de Taylor à volta de $x_{min}$:

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}} \delta x \; + \; \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}} \delta x^2 \; + \; \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{tx_{min}} \delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

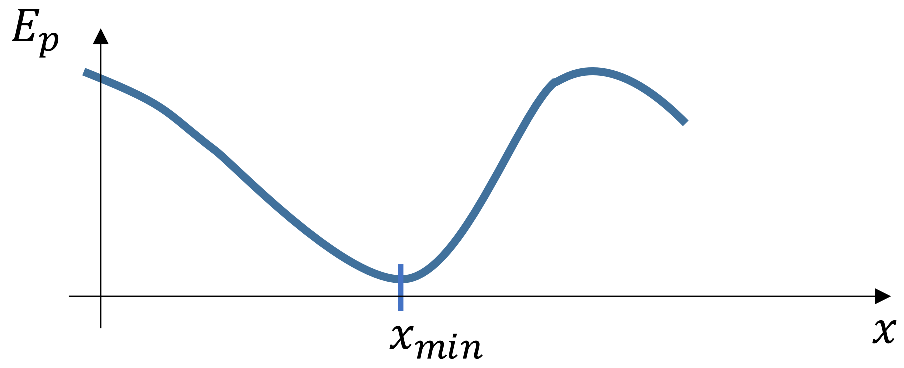
com $\delta x = x - x_{min}$

em $x_{min}$ a força é nula! $\quad F_x(x_{min}) = -\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}} = 0$

$$E_p(x) - E_p(x_{min}) = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}} \delta x^2 \; + \; \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{tx_{min}} \delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

# Importância do oscilador harmónico

Energia potencial qualquer, com mínimo em $x_{min}$




$$E_p(x) - E_p(x_{min}) = \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}\bigg|_{x_{min}} \delta x^2 \quad + \frac{1}{3!}\frac{d^3E_p}{dx^3}\bigg|_{x_{min}} \delta x^3 \quad + \sigma(\delta x^4)$$

Se fizermos a escolha: $E_p(x_{min}) = 0 \quad e \quad x_{min} = 0$

$$E_p(x) = +\frac{1}{2}k\, x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3E_p}{dx^3}\bigg|_{x_{min}} x^3 + \sigma(x^4)$$

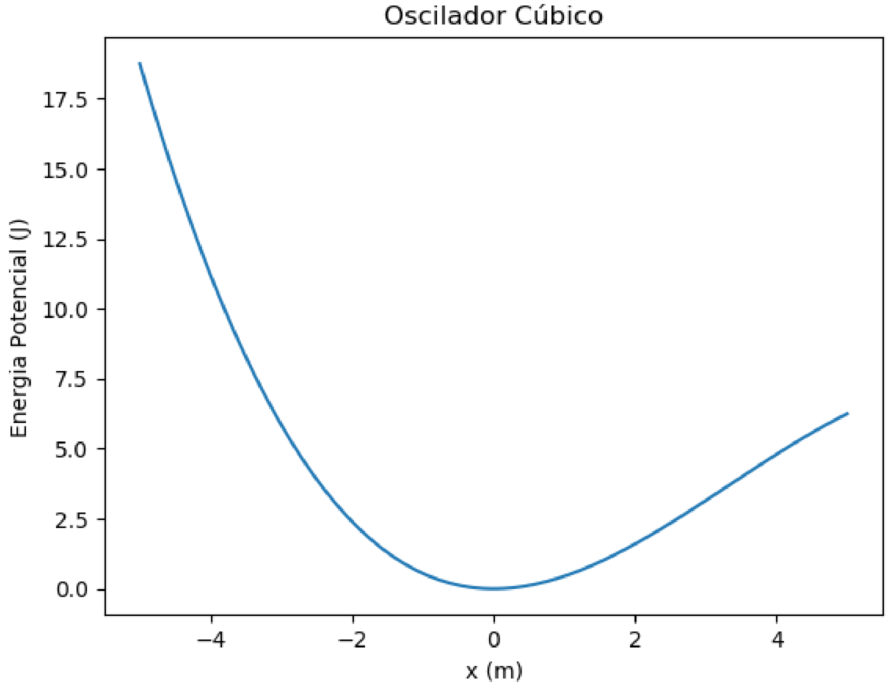
com: $\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x_{min}} = k$

e requer $\delta x \ll 1$

Troncar a $\sigma(x^2) \longrightarrow$ oscilador harmónico simples.

Troncar a $\sigma(x^3) \longrightarrow$ oscilador cúbico.

**Oscilador cúbico:** $$E_p(x) = \frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3E_p}{dx^3}\bigg|_{x_{min}} x^3 \quad = \quad \frac{1}{2}k\,x^2 + \alpha\,x^3$$

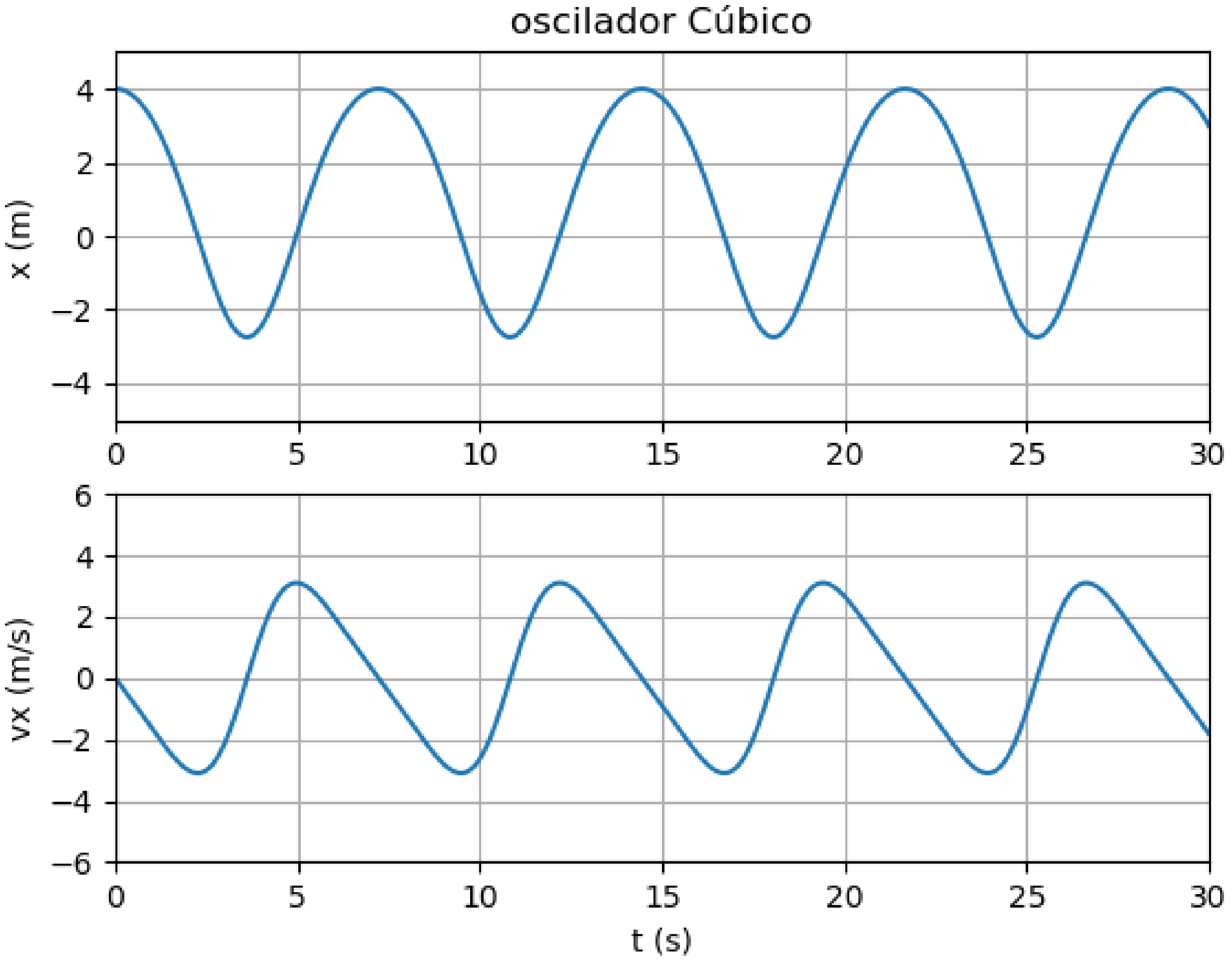



Solução analítica (muito) difícil

$\Rightarrow$ <u>Método de Integração Numérico de Euler-Cromer</u>

**Oscilador cúbico:** $E_p(x) = +\frac{1}{2}k\,x^2 + \alpha\,x^3$

Método de Integração Numérico de Euler-Cromer



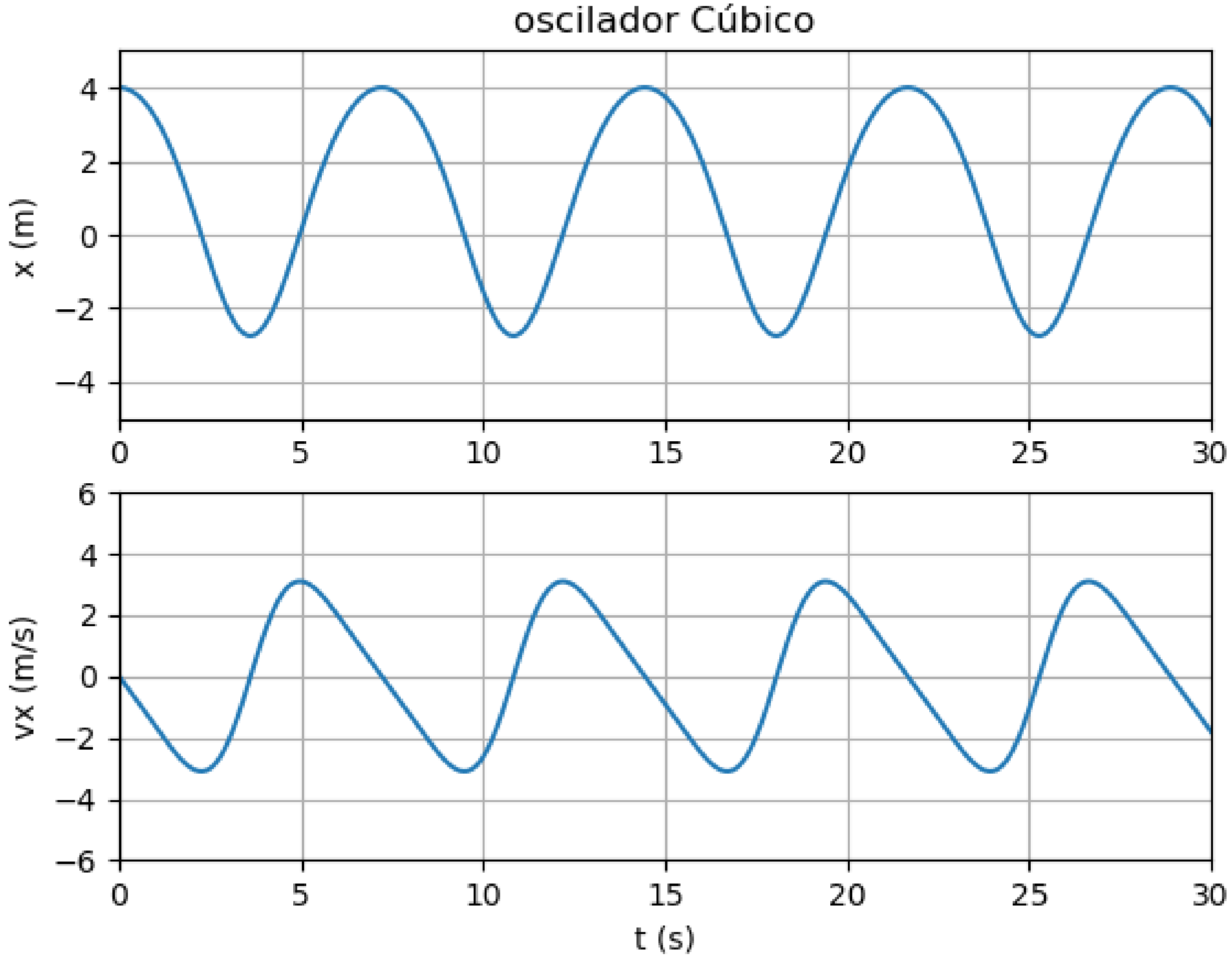

Força: $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -k\,x - \alpha\,x^2$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}\,x^2 \\ x(0) \\ v_x(0) \end{cases}$$

**Oscilador cúbico** $$E_p(x) = +\frac{1}{2}k\,x^2 + \alpha\,x^3$$

Método de Integração Numérico de Euler-Cromer

- Movimento periódico
- Podemos calcular a amplitude e o período usando os métodos de interpolação.

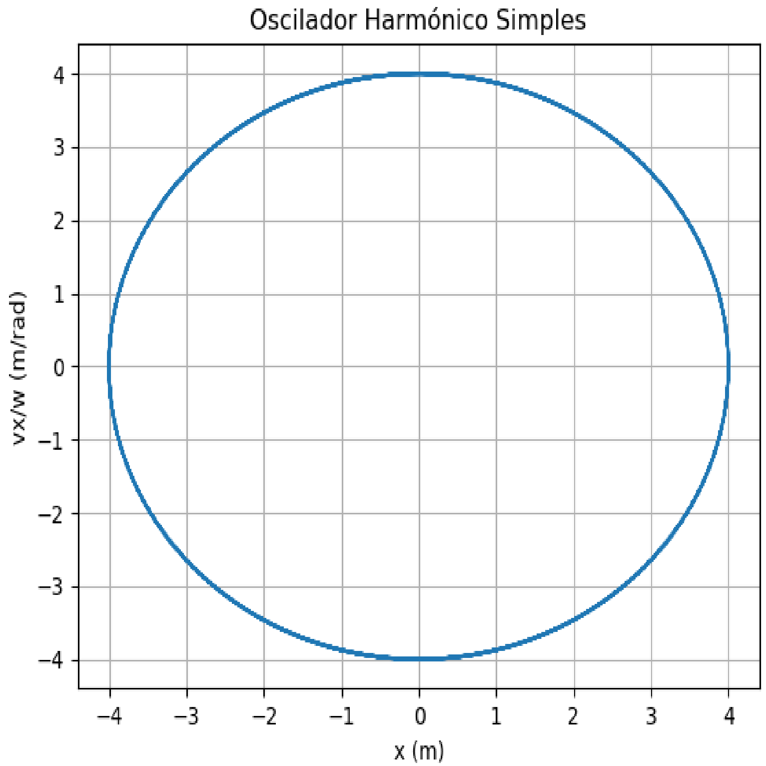


# Espaço de fase $(x, v_x)$

## Oscilador Harmónico Simples

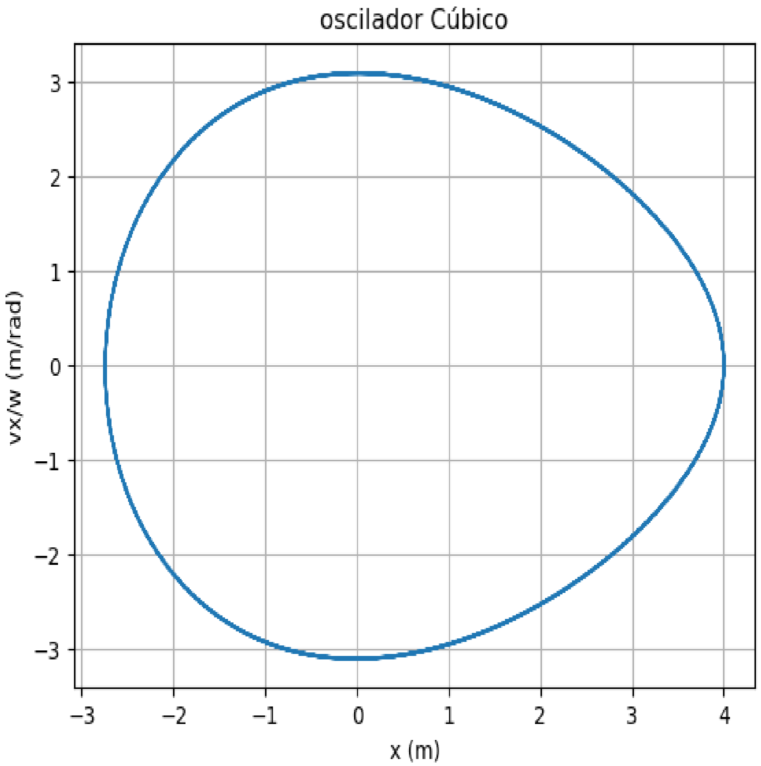
$x^2(t) + \left(\frac{v_x(t)}{\omega}\right)^2 = A^2$ eq. circunferência raio $A$

$\Rightarrow$ plot $\frac{v_x(t)}{\omega}$ vs $x$

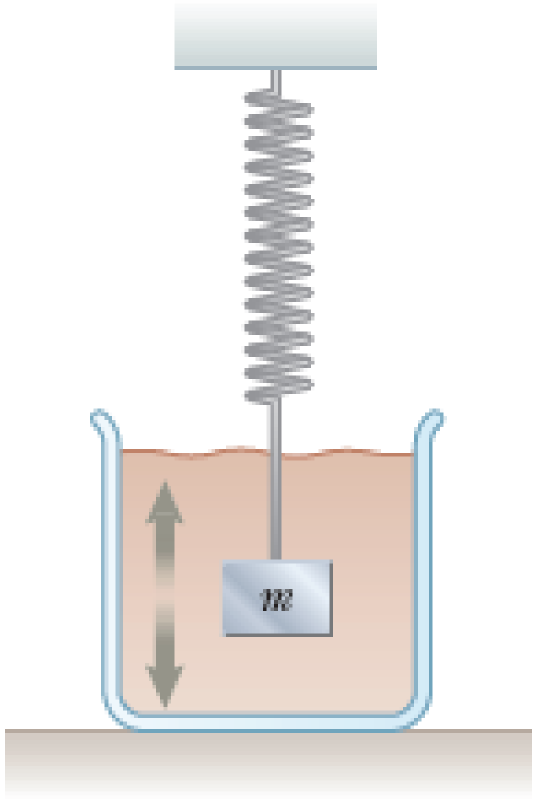



## Oscilador Cúbico

Não é circular!



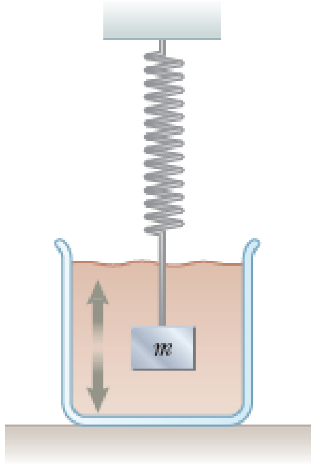
# Oscilador Harmónico Amortecido




$$F_x^{resistência} = -bv_x$$

# Oscilador Harmónico Amortecido

$$F_x = -k\,x - bv_x$$




$\Longrightarrow$

$$a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x \; = -\,\omega_0^2\,x - \frac{b}{m}v_x$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega_0^2\,x - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt}$$

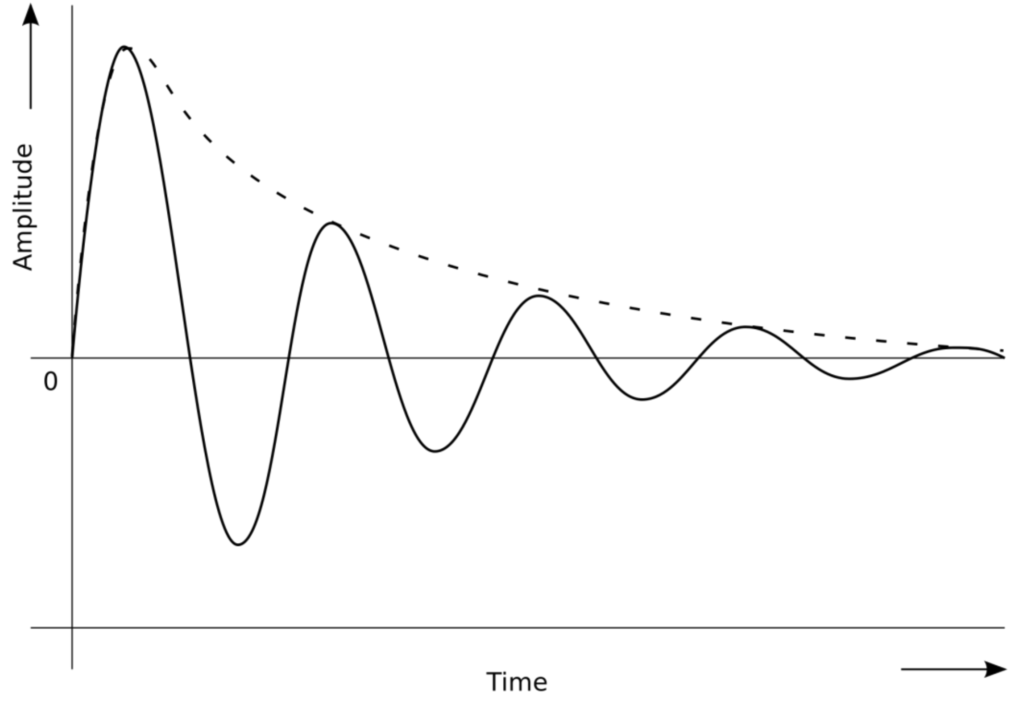
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} =$ frequência de oscilação sem amortecimento

Três casos:

- Amortecimento fraco: $b < 2\,m\,\omega_0$
- Amortecimento forte $b > 2\,m\,\omega_0$
- Amortecimento crítico $b = 2\,m\,\omega_0$

# Oscilador Harmónico Amortecido -- Cálculo Analítico

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega_0^2\,x - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt}$$




Amortecimento fraco: $\quad b < 2\,m\,\omega_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A_a\,e^{-\frac{b}{2m}t}\left[\omega\sin(\omega\,t + \phi) + \frac{b}{2m}\cos(\omega\,t + \phi\,)\right] \end{cases}$$

em que $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}} =$ frequência de oscilação sem amortecimento

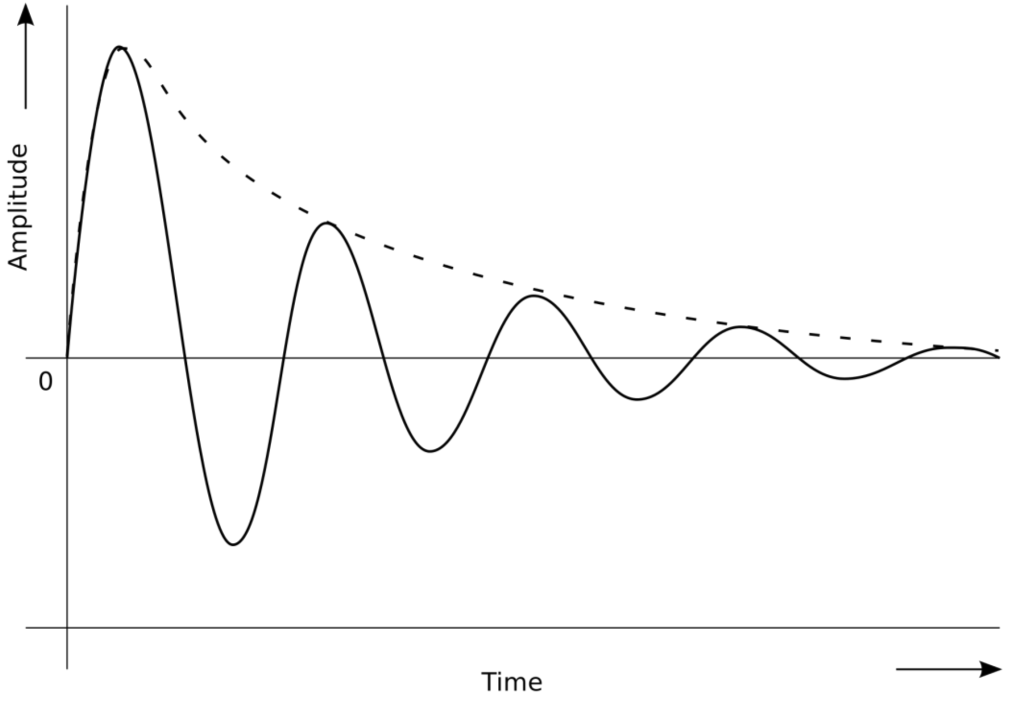
Oscilações $\cos(\omega\,t + \phi\,)$, mas com amplitude que decai exponencialmente: $A_a e^{-\frac{b}{2m}t}$

**Oscilador Harmónico Amortecido -- Cálculo Analítico**

<u>Amortecimento fraco</u>: $b < 2\,m\,\omega_0$

$$\begin{cases} x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t+\phi\,) \\ v_x(t) = -A_a\,e^{-\frac{b}{2m}t}\left[\omega\sin(\omega\,t+\phi)+\frac{b}{2m}\cos(\omega\,t+\phi\,)\right] \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$




Sabendo $x(0)$ e $v_x(0)$ calcula-se $A_a$ e $\phi$ :

$$\phi = \tan^{-1}\left[-\left(v_x(0)+x(0)\,\frac{b}{2m}\right)/\omega\right]$$

obtemos 2 valores . Temos de escolher qual deles é!

$$A_a = \sqrt{x(0)^{\,2} + \left[\left(v_x(0)+x(0)\,\frac{b}{2m}\right)/\omega\right]^2}$$

# Oscilador Harmónico Amortecido -- Outros casos

## Amortecimento forte $b > 2\,m\,\omega_0$

Amortecimento tão forte que o corpo vai diretamente para a posição de equilíbrio, sem oscilar

**Decaimente exponencial** $x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\{Ce^{\omega t} + De^{-\omega t}\}$

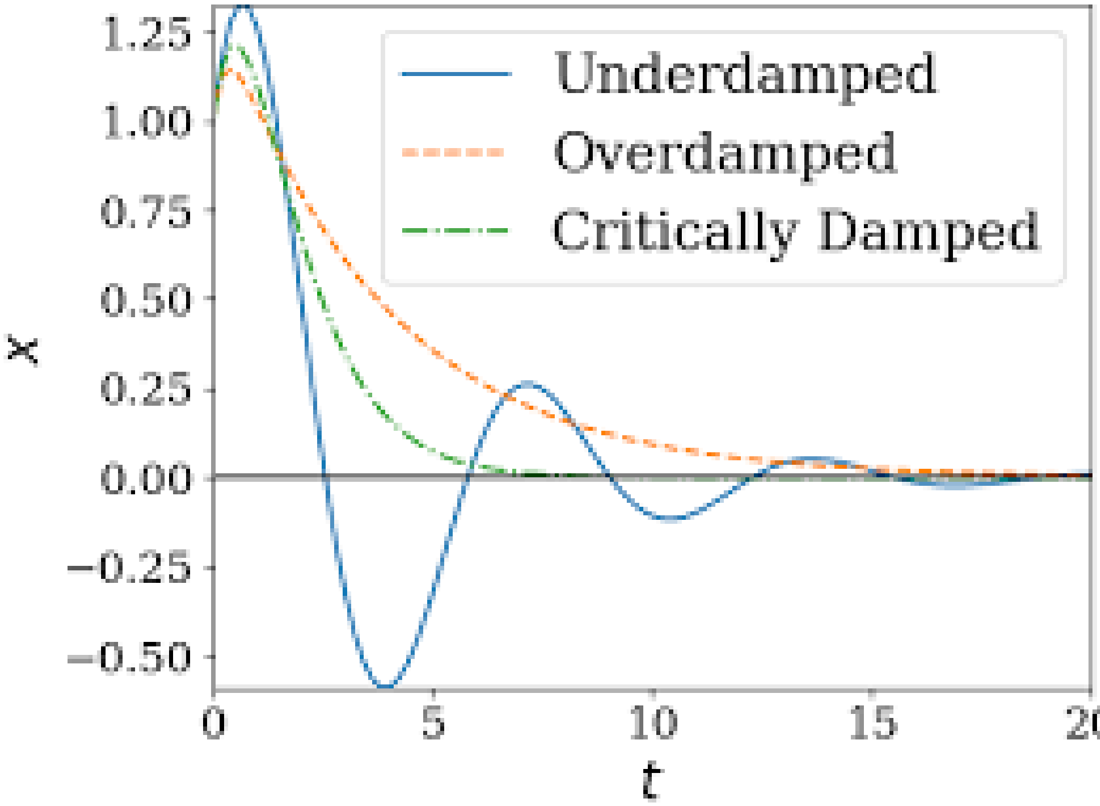
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Para valores maiores de $b$, o decaimento é mais lento

## Amortecimento critico $b = 2\,m\,\omega_0$

Quando começa o amortecimento forte

**Decai o mais rapidamente possível** $x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\{C + \ Dt\}$



# Oscilador Harmónico Amortecido    Cálculo Numérico

Usando o método de Euler-Cromer obtivemos as soluções:

<u>Amortecimento forte</u>:    $b > 2\,m\,\omega_0$

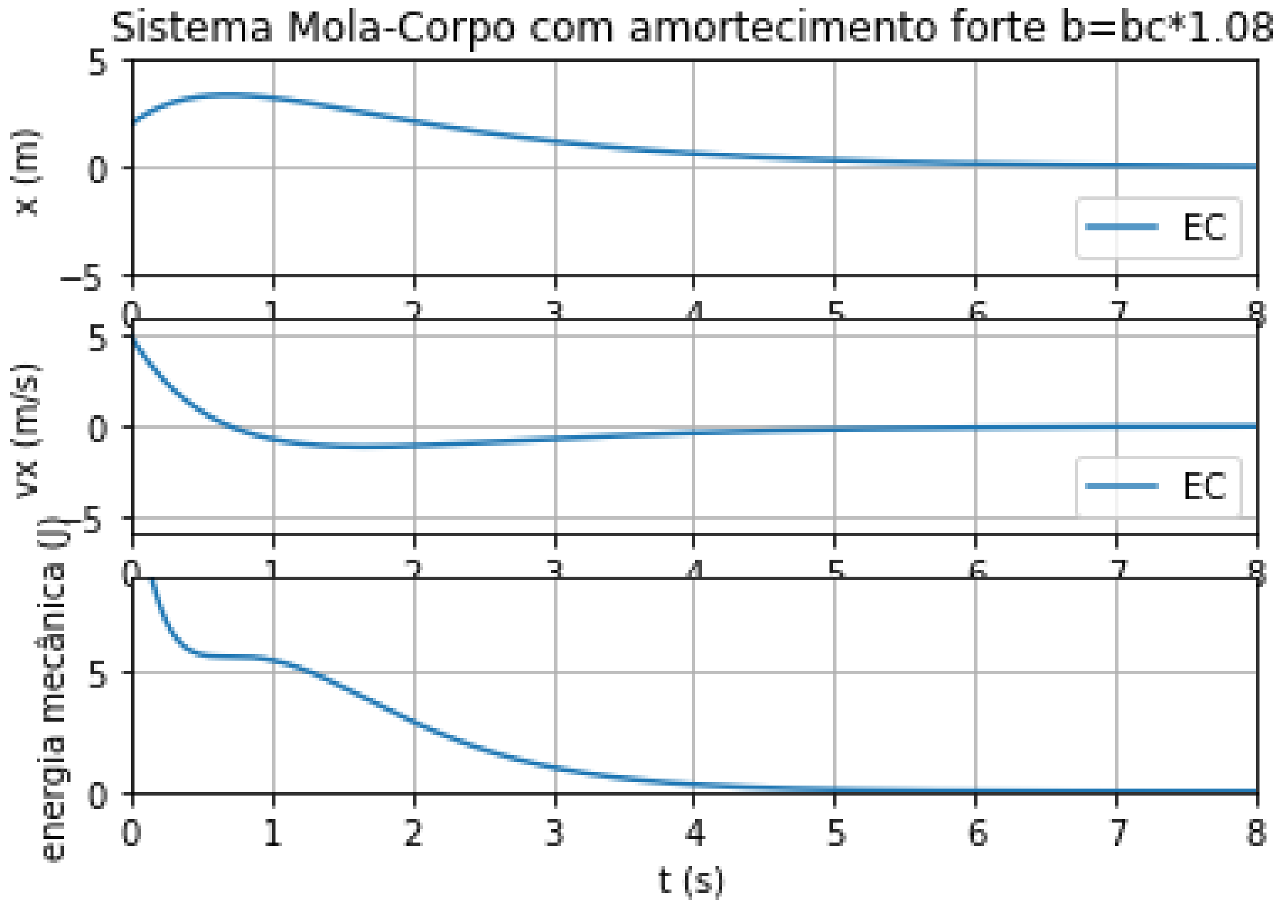
$F_x = -k\,x\ - b v_x \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$

$k = 1$ N/m
$m = 1$ kg    $\omega_0 = 1\ \mathrm{rad/s}$

$b_c = 2$ kg/s

$b = \boldsymbol{b_c} \times \mathbf{1.08} = 2.16$ kg/s

$x(0)$=2m  e  $v_x(0) = 5$m/s



# Oscilador Harmónico Amortecido     Cálculo Numérico

<u>Amortecimento fraco</u>: $b < \ 2\, m\, \omega_0$

$F_x = -k\,x\ - bv_x \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$

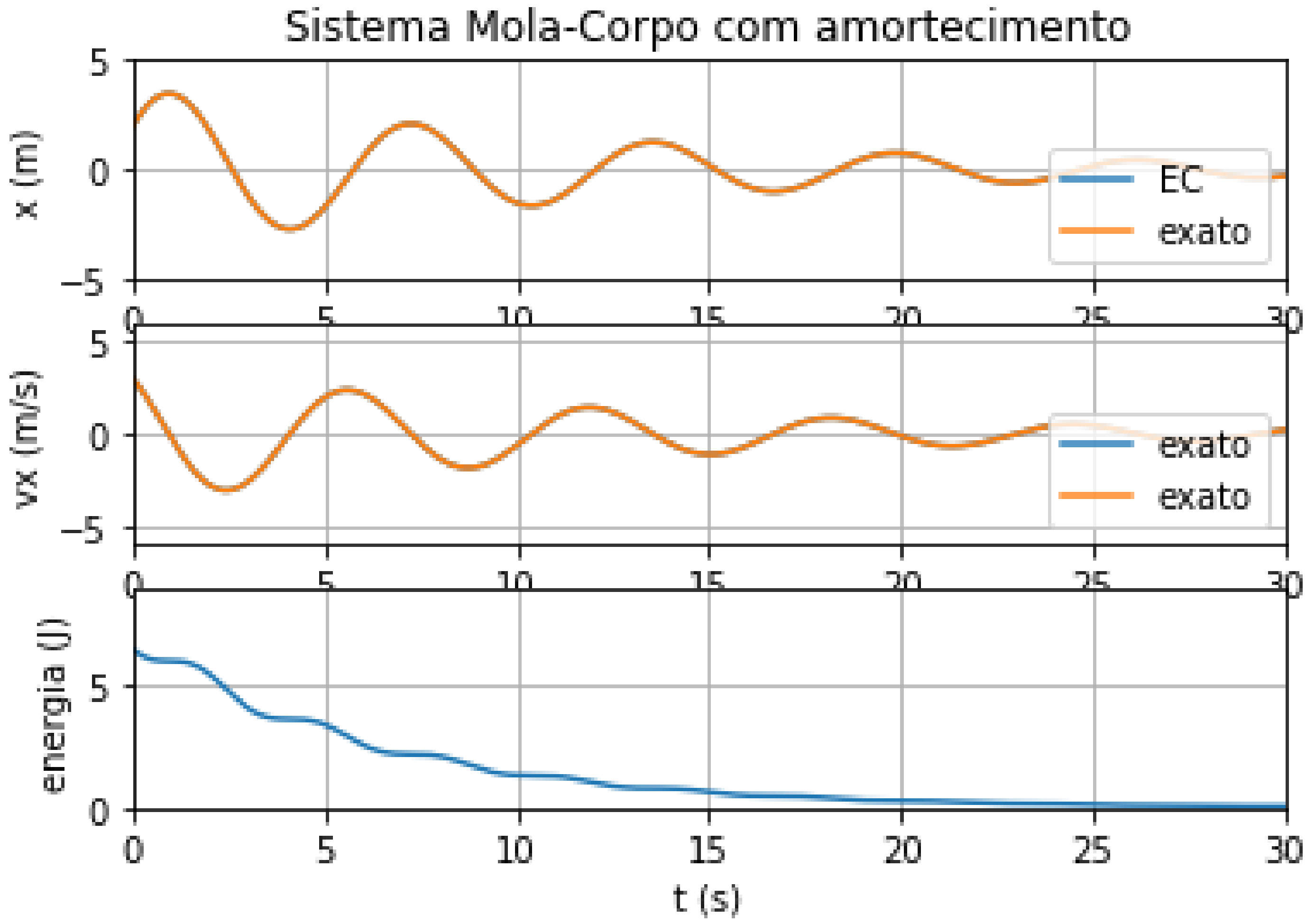
$k = 1$ N/m
$m = 1$ kg     $\omega_0 = 1\ \text{rad/s}$
$b_c = 2$ kg/s

$b = \boldsymbol{b_c} \times \mathbf{0.08} = 0.16$ kg/s

$x(0)$=2m  e  $v_x(0) = 5$m/s

Do resultado numérico ($\delta t = 10^{-5}$ s)
T = 6.3034 s
$\omega = 0.9968$ rad/s

$\omega^{\ analitico} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ = 0.9968 rad/s

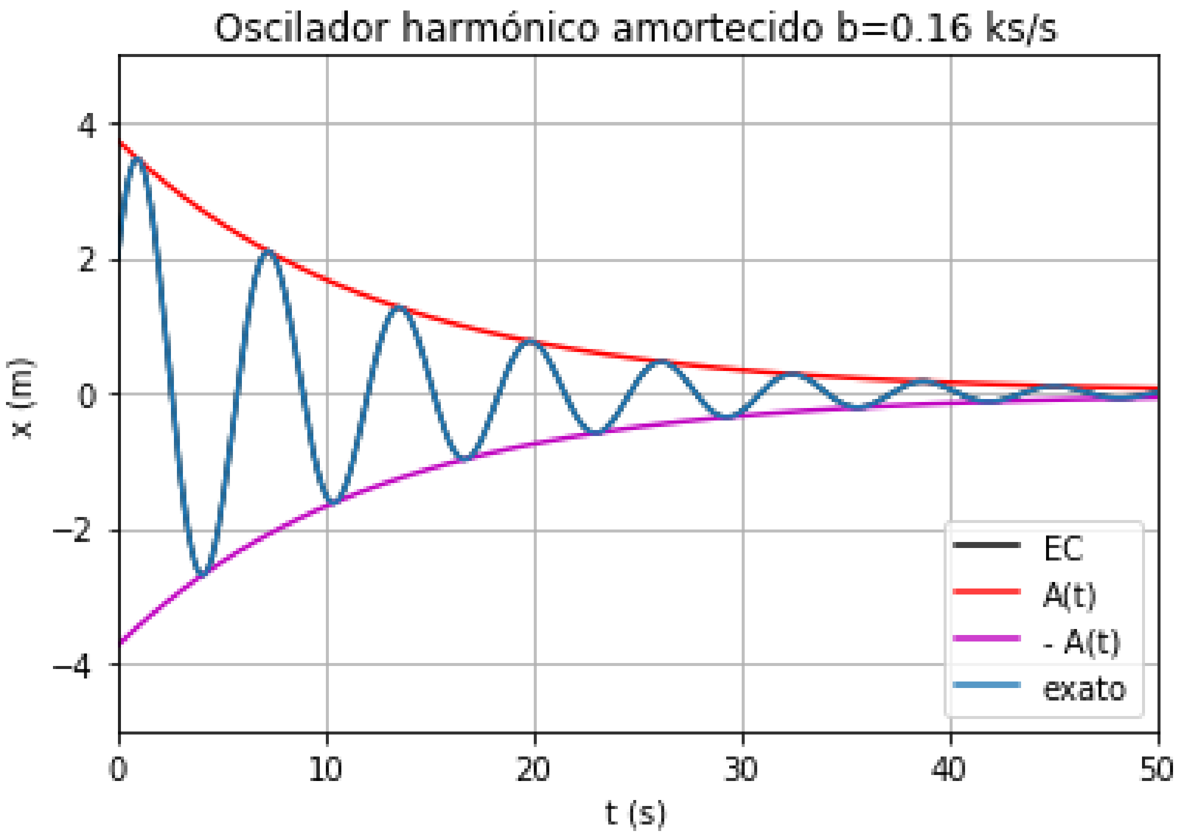


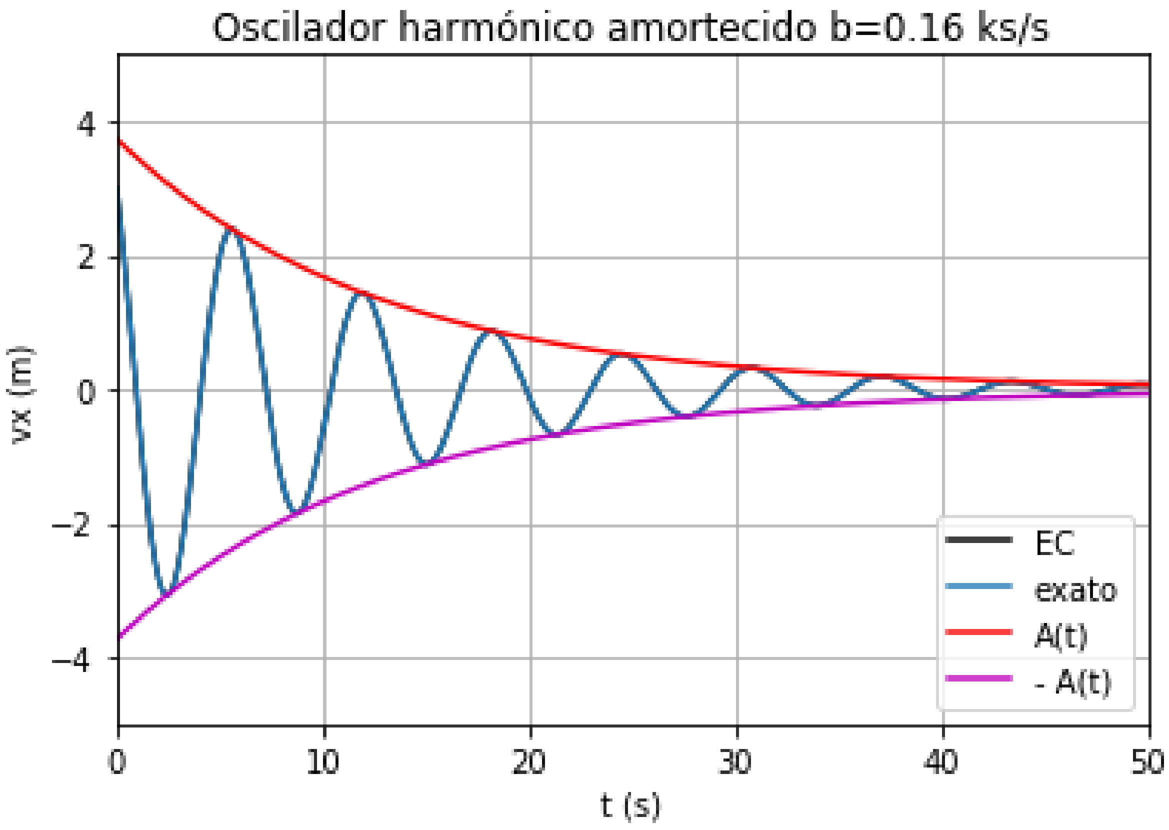
## Amortecimento fraco

$$A(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$x(t) = A(t)\cos(\omega\, t + \phi\,)$$

$$v_x(t) = -A(t)\left[\omega \sin(\omega\, t + \phi) + \frac{b}{2m}\cos(\omega\, t + \phi\,)\right]$$



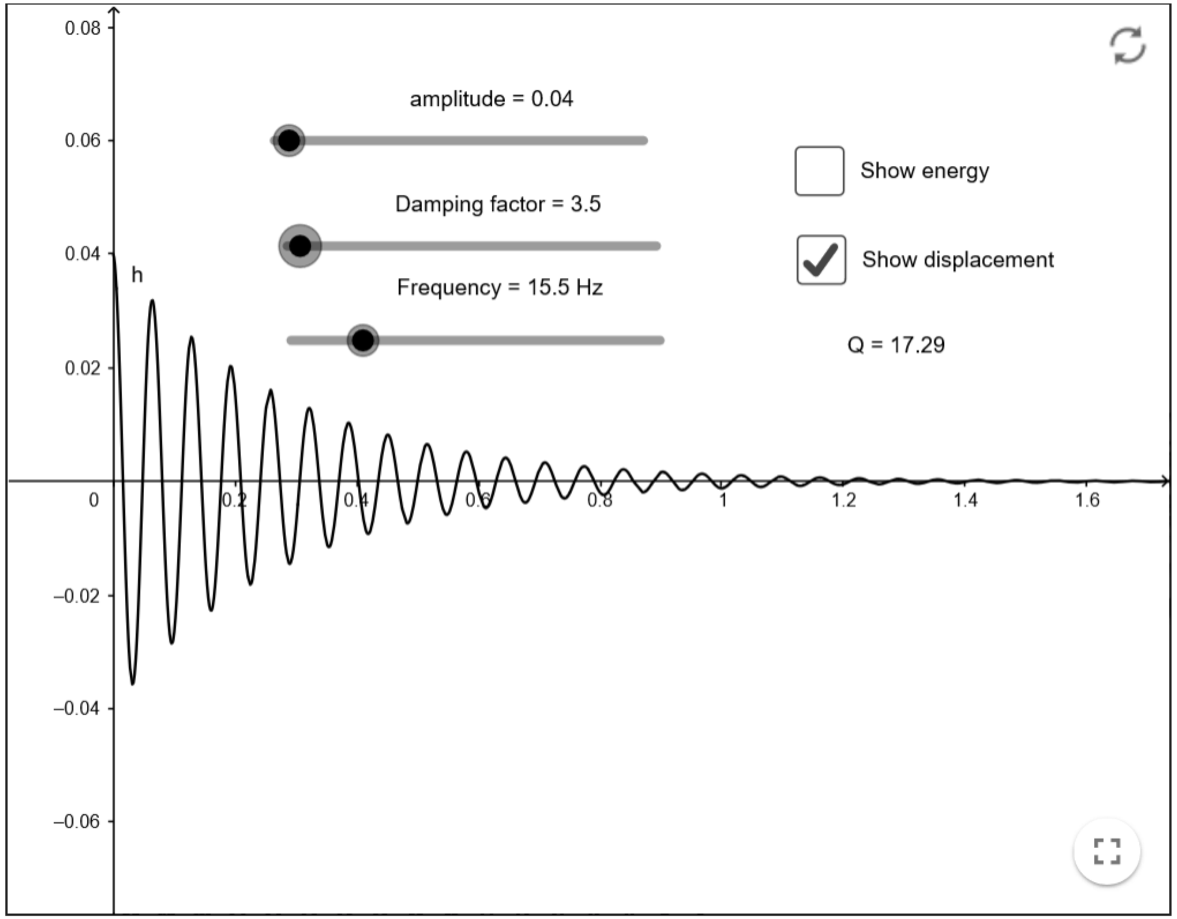




Amplitude decai exponencialmente

# Damped harmonic motion

**Autor:** Chris Hamper

Vary the damping factor to see the the change in Q value




https://www.geogebra.org/m/ZMjkkEwU

## Problema

O movimento de um oscilador amortecido obedece a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega_0^2\,x - 2c\,\frac{dx}{dt}$$

onde *c = b/2m* e $\omega_0 \;=\sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Mostre que $x(t) = Ae^{-\,ct}\cos(\omega\,t\,)$ é uma solução deste equação se $\omega$ tome um determinado valor. Qual é este valor?

## Problema

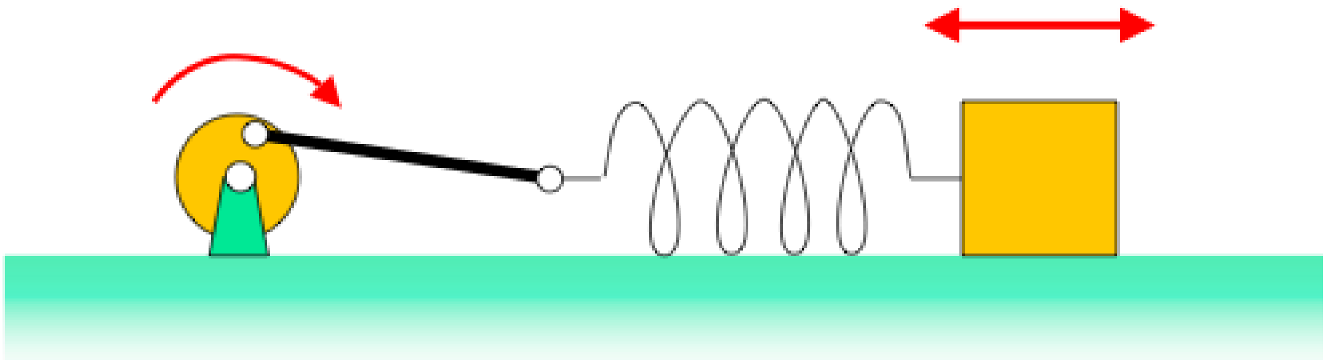
Um oscilador amortecido consiste de uma massa de $m$=2 kg afixada a uma mola de constante $k$, e movendo num fluído viscoso.

Se o coeficiente de amortecimento for $b$ = 1 kg/s, qual deve ser o valor de $k$ para que o oscilador seja criticamente amortecido?

# Teste 2 até aqui!

# Oscilador Harmónico Forçado

$$F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$$



## **Oscilador Harmónico Forçado** (e com amortecimento fraco)

Força externa $F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$

$$F_x = -k\,x \; - bv_x + F_0 \cos(\omega_f t)$$

$$\Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

equação diferencial de segunda ordem

## **Oscilador Harmónico Forçado** (e com amortecimento fraco)

Força externa $F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$ $\Longrightarrow$ $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$

Solução Analítico:

$$x(t) = A_a\, e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_a\, t + \phi\,) + A(\omega_f) \cos(\omega_f t + \alpha)$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

parte estacionária = permanece no tempo

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

parte transiente
= tende para zero (posição de equilíbrio)

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b\omega_f/m}{\omega_f^2 - \omega_0^2}\right)$$

Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

## Regime transiente

$$x(t) = A_a\, e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_a\, t + \phi\,) + A(\omega_f) \cos(\omega_f t + \alpha)$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Parte transiente da solução é **idêntica ao oscilador amortecido** sem força externa

A frequência $\omega_a$ é diferente da frequência $\omega_f$ da força externa

Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

## Regime estacionário (permanente no tempo)

$$x(t) = A_a\, e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_a\, t + \phi\,) + A\big(\omega_f\big) \cos(\omega_f t + \alpha)$$

$$A\big(\omega_f\big) = \frac{F_0 /_m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

**Movimento harmónico simples**, com a mesma frequência da força externa

mas a **amplitude depende da frequência** $\omega_f$ **da força exterior**
e da sua intensidade $F_0$ e do sistema mola-corpo expresso por $\omega_0$ , $k$, $m$, e $b$.

**Problema**

Uma mola exerce uma força $F_x = -k\ x(t)$, em que $k$ é a constante elástica da mola, num corpo de massa $m$. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

Ao oscilador está aplicada uma força exterior

$$F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$$

e uma força de amortecimento

$$F_x^{amort} = -bv_x$$

em que

$$b = 0.15 \text{ kg/s}$$
$$F_0 = 2\ \text{N}$$
$$\omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

Determine numericamente (método de Euler-Cromer) a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?

# Oscilador Harmónico Forçado -- Cálculo Numérico. Método de Euler-Cromer

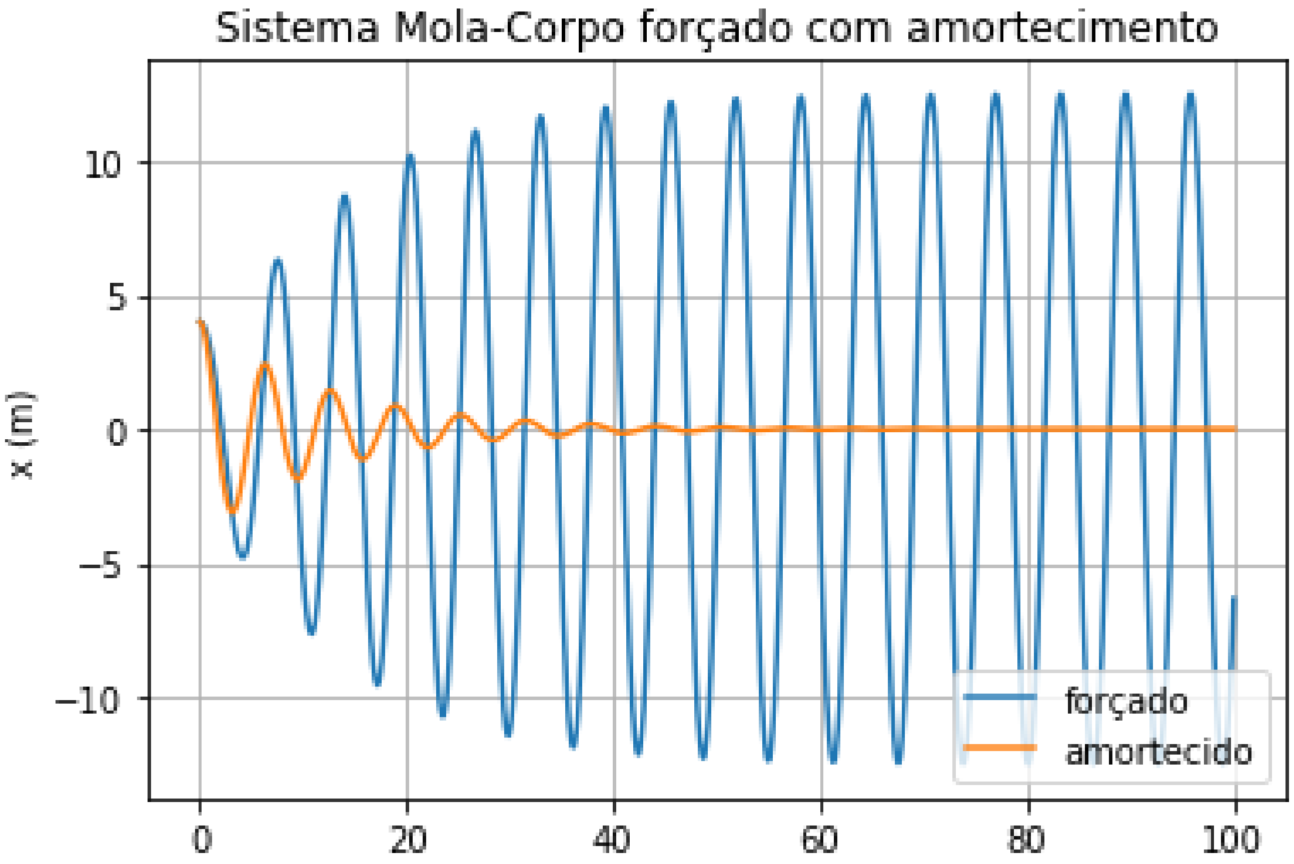
Força externa $F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$

Força de amortecimento $F_x^{amort} = -b v_x$

$$a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t)$$

$x(t=0) = 4$ m
$v_x(t=0) = 0$
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

$b = 0.15$ kg/s
$F_0 = 2\ N$
$\omega_f = 1$ rad/s




regime transiente regime estacionário

# Oscilador Harmónico Forçado -- Amplitude no regime estacionário

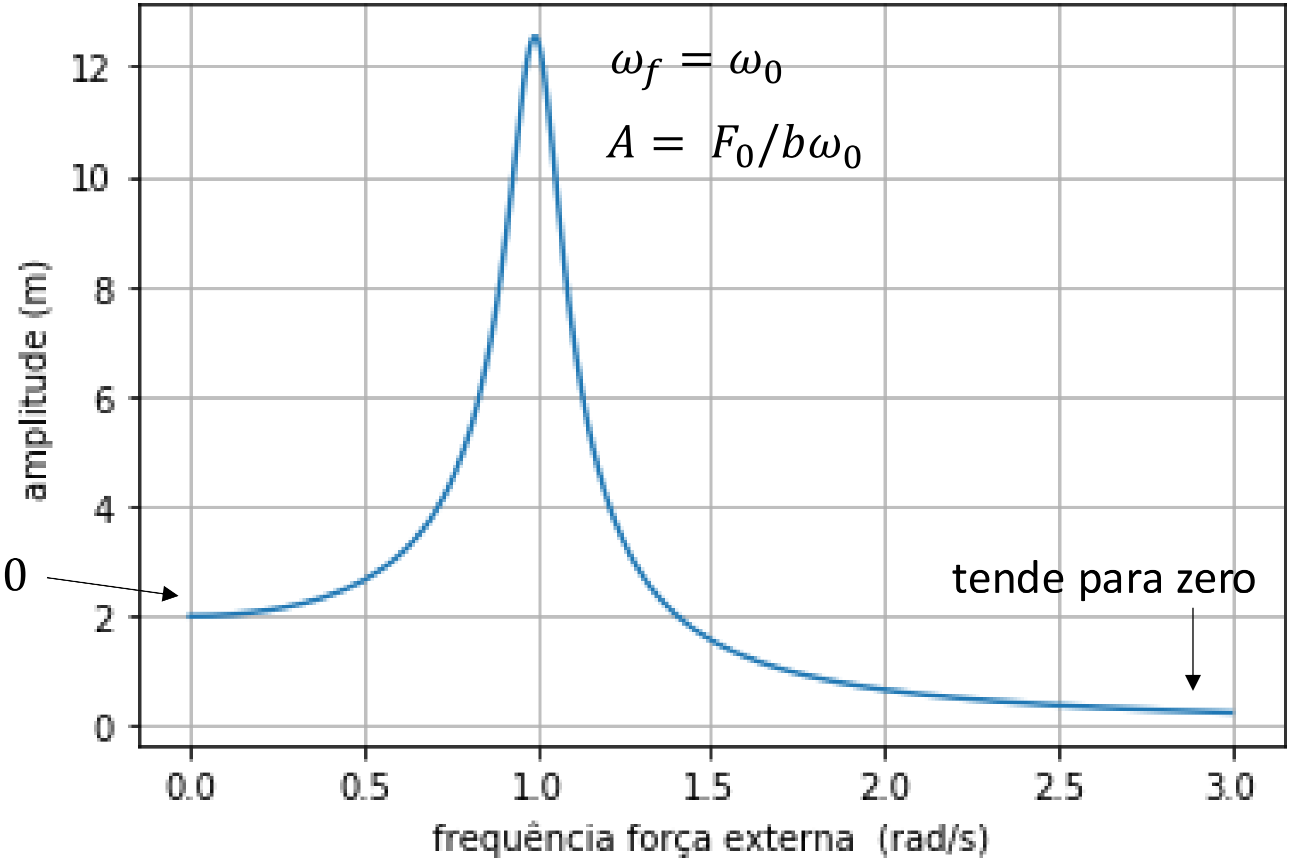
$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

Vamos variar a frequência do forçamento

$x(t=0) = 4$ m
$v_x(t=0) = 0$ m/s
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 0.16$ kg/s

$F_0 = 2\ N$
$\omega_f =$ *qualquer* rad/s

$A(\omega_f = 0) = \frac{F_0}{k} \neq 0$




Amplitude não depende das condições iniciais

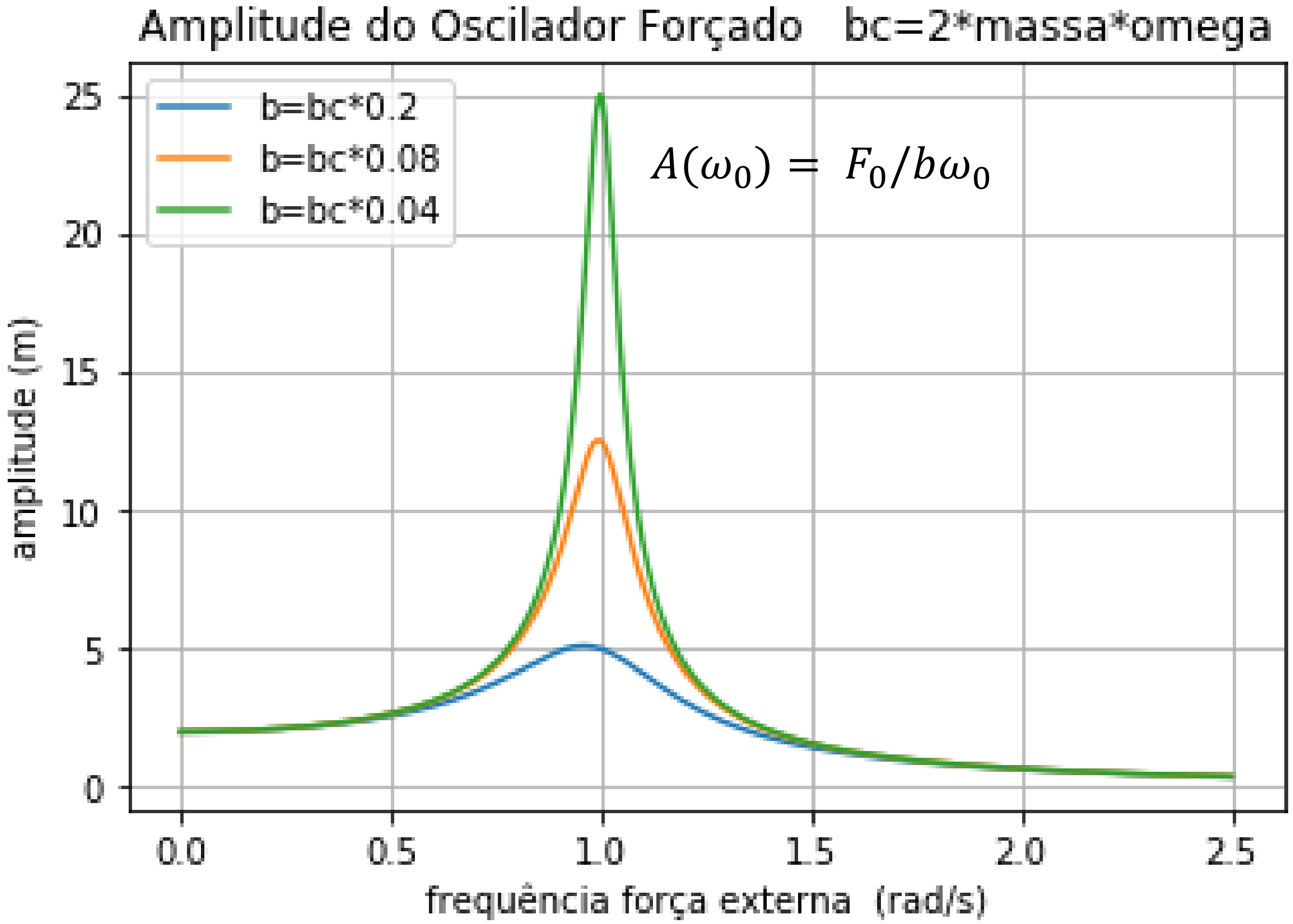
# Oscilador Harmónico Forçado -- Amplitude no regime estacionário

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

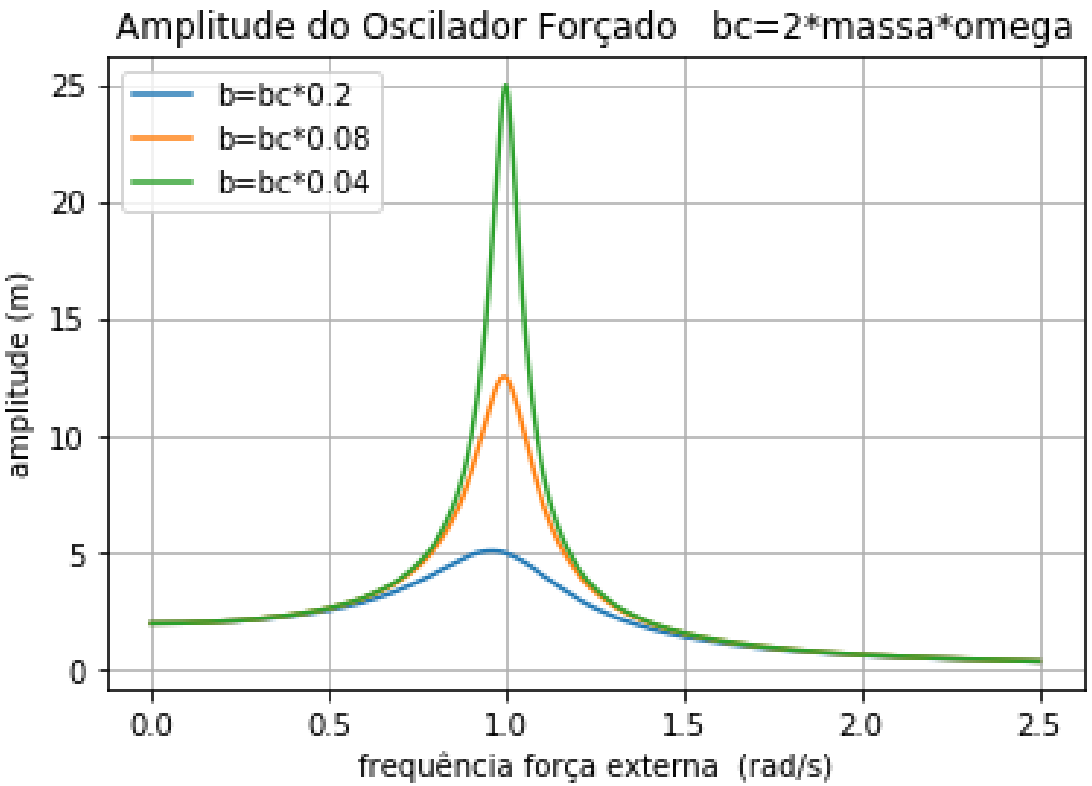
Diferentes valores de $b$
(coeficiente de amortecimento)

$x(t=0) = 4$ m
$v_x(t=0) = 0$ m/s
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 3\ \mathit{valores}$ kg/s

$F_0 = 2\ N$
$\omega_f = qualquer$ rad/s



## **Oscilador Harmónico Forçado** (e com amortecimento fraco)




Amplitude máxima perto de $\omega_f \simeq \omega_0$

Mesmo quando $F_0$ é pequeno **a amplitude** (do movimento oscilatório simples do regime estacionário) **pode ser enorme** (e não depende das condições iniciais)

Este fenómeno chama-se

RESSONÂNCIA

# Ressonância

Oscilador Harmónico Forçado $F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$

Tem amplitude máxima perto de $\omega_f \simeq \omega_0$

<u>Na ressonância, a velocidade e a força externa estão em fase</u>

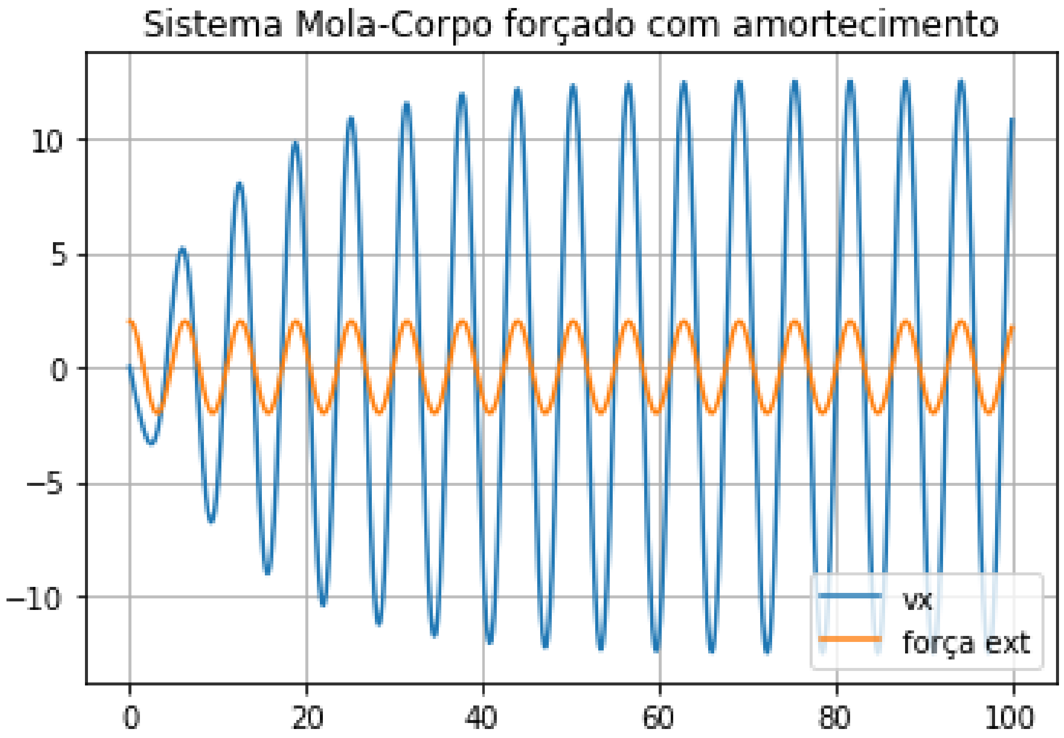
Em qualquer instante $F_x v_x > 0$

Ou seja, a força exterior empurra o corpo sempre a favor (ou no sentido) da velocidade

$$F_x v_x = P_o$$

A potência fornecida pela força externa (pelo motor) é sempre positiva, e tomará o valor máximo.

A energia mecânica $E = \frac{1}{2}\, k\, A^2$ é máxima



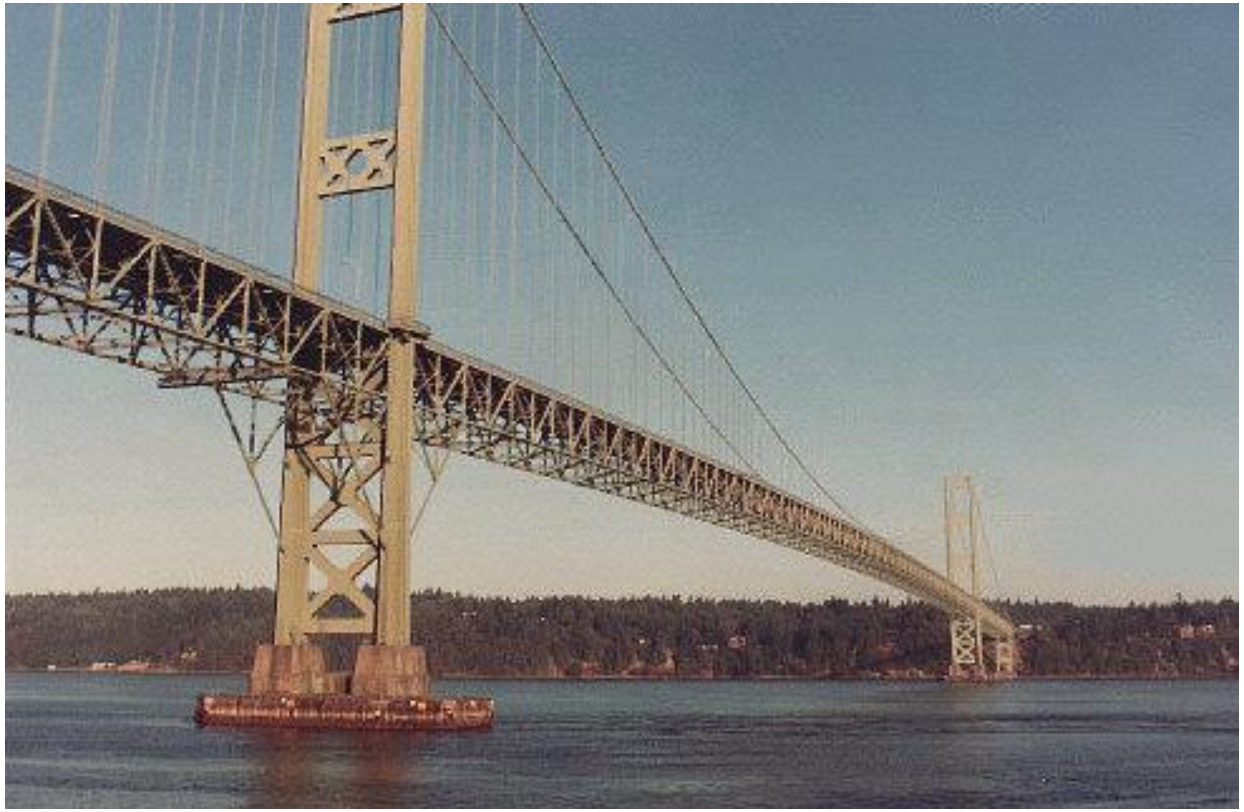

A energia perdida devida à resistência do meio também é máxima.

# Ressonância

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo a ponte oscilar com $\omega \approx$ frequência de ressonância!



https://www.youtube.com/watch?v=XggxeuFDaDU



**Estreito de Tacoma**

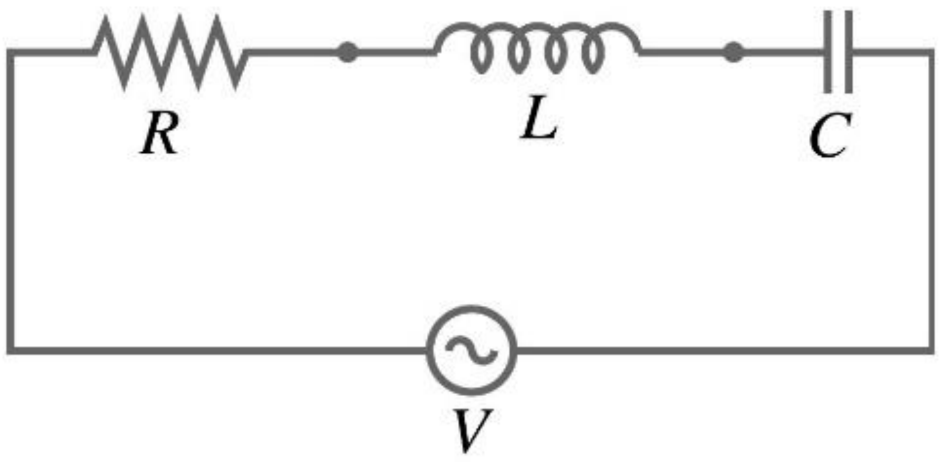
Nova ponte, 1950

Modelos extensivamente testados!

estrutura mais rígida,
aberturas para permitir a passagem do vento

Ainda não caiu.

# Circuitos elétricos




$R$ a resistência,
$L$ a indutância da bobine e
$C$ a capacidade do condensador

$V$ fonte de tensão AC

## Circuito RLC em série

A carga elétrica $Q(t)$ no condensador varia (oscila) de acordo com

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = V_0\sin(\omega t + \phi)$$

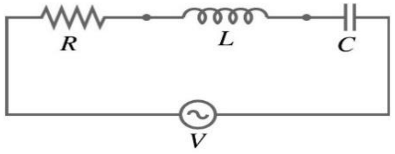
tensão proporcional à derivada da corrente $V_L = L\frac{dI}{dt}$

tensão proporcional à corrente $V_R = RI$

tensão proporcional à carga $V_C = Q/C$

tensão do fonte AC

# Circuitos elétricos



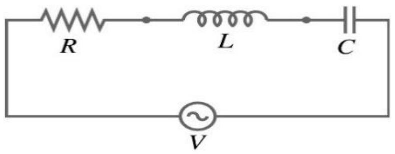

Comparação dos variáveis e coeficientes dos sistema corpo-mola forçadao e amortecido e dum circuito elétrico RLC em série:

| Sistema mola-corpo forçado amortecido | Circuito elétrico RLC |
|---|---|
| $t$ | $t$ |
| $x(t)$ | $Q(t)$ |
| $v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}$ | $I = \dfrac{dQ}{dt}$ |
| $m$ | $L$ |
| $k$ | $\dfrac{1}{C}$ |
| $b$ | $R$ |
| $F_0$ | $V_0$ |
| $\omega_f$ | $\omega$ |

**Com esses substituições, as equações diferenciais são de forma idêntica:**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - b\,v_x + F_0\cos(\omega_f t) \qquad L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = V_0\sin(\omega t + \phi)$$

# Circuitos elétricos




**As equações diferenciais de sistema corpo-mola-motor e de um circuito elétrico RLC em série são equivalentes.**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - b\,v_x + F_0\cos(\omega_f t) \qquad\qquad L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = V_0\sin(\omega t + \phi)$$

Então o circuito elétrico RLC mostre comportamento análogo ao oscilador forçado:

$$Q(t) = A_a\,e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega_a\,t + \varphi\,) + A(\omega)\sin(\omega_f t + \alpha)$$

- Oscilações iniciais transitórias que decaem com o tempo

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{CL}$$

- Regime estável com oscilações com a mesma frequência da fonte de tensão

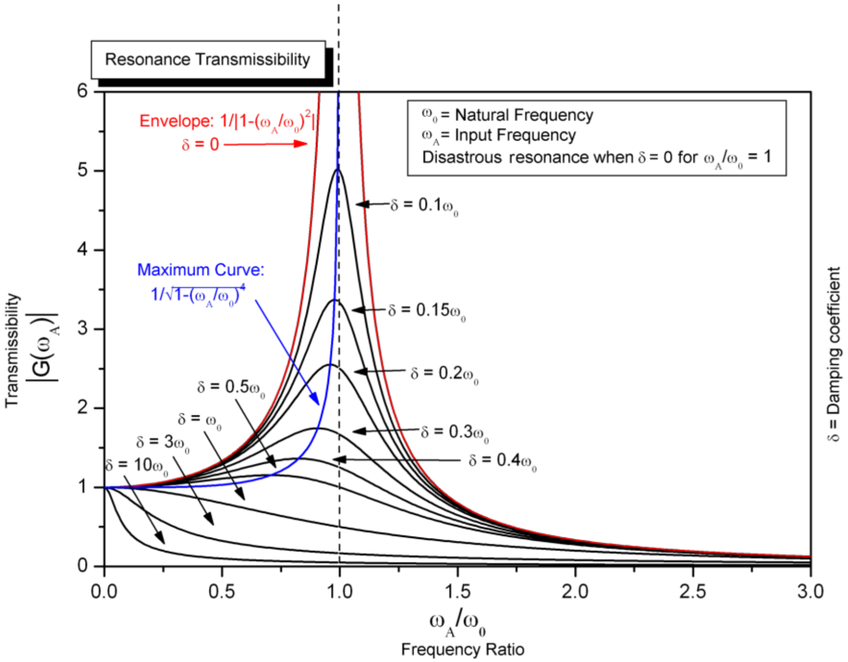
$$A(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{R\omega}{L}\right)^2}}$$

- Máximo de amplitude (ressonância) quando a frequência do potencial elétrico aplicado $\omega \approx \omega_{ressonancia} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{R\omega/L}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

# Ressonância nos circuitos elétricos







Um rádio recebe todas as ondas eletromagnéticas emitidas pelas estações de rádio.

O fenómeno ressonância permite amplificar no rádio a estação de rádio pretendida,

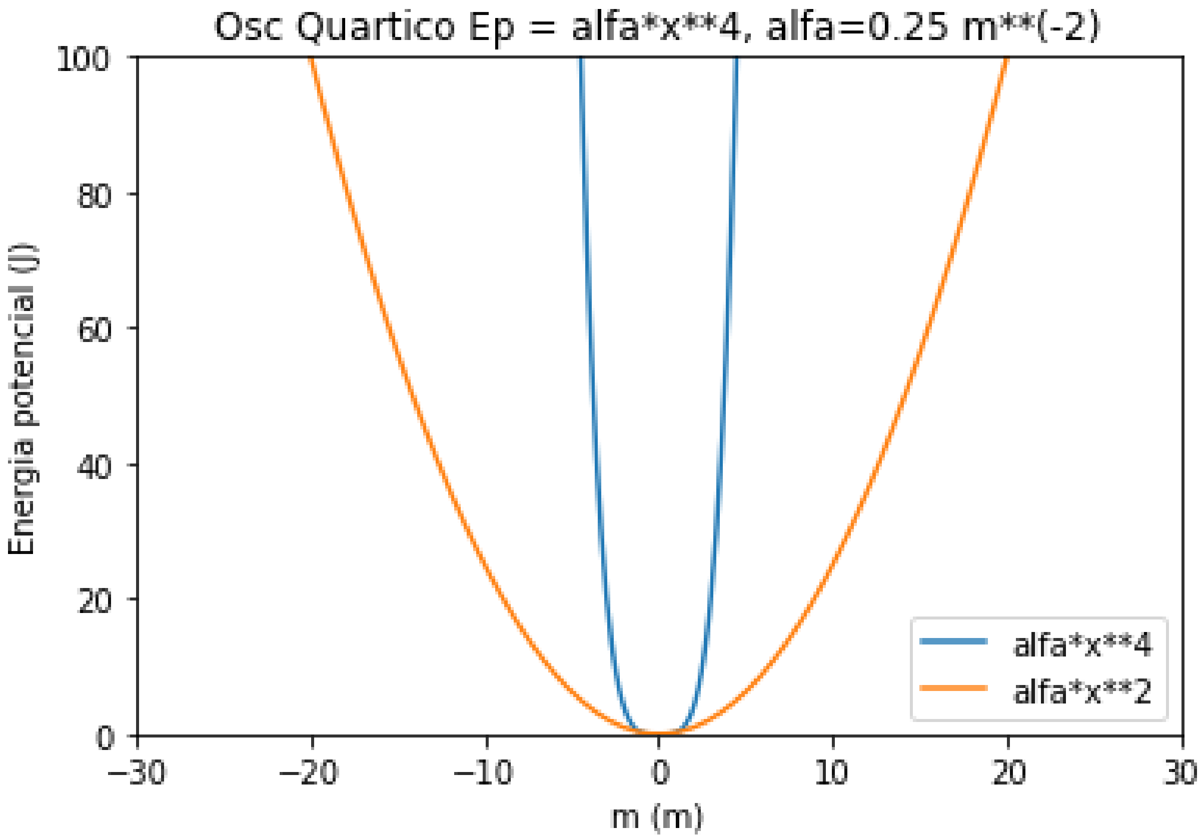
<u>mudando (sintonizando) a frequência $\omega_0$ até coincidir</u> com a frequência que se pretende ouvir.

## **Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado** (e com amortecimento fraco)

$$E_p = \alpha x^4$$

$\alpha = 0.25$ m

$$F_x = -4\alpha x^3 - b v_x + F_0 \cos(\omega_f t)$$




Termo da força linear em $x$ ausente
(oscilador não harmónico)

Oscilador extremamente não linear
força muda abruptamente com posição

# Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

## Cálculo Numérico: **Método de Euler-Cromer**

$$a_x = -4\frac{\alpha}{m}x^3 - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

$k = 1$ N/m $\qquad m = 1$ kg

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

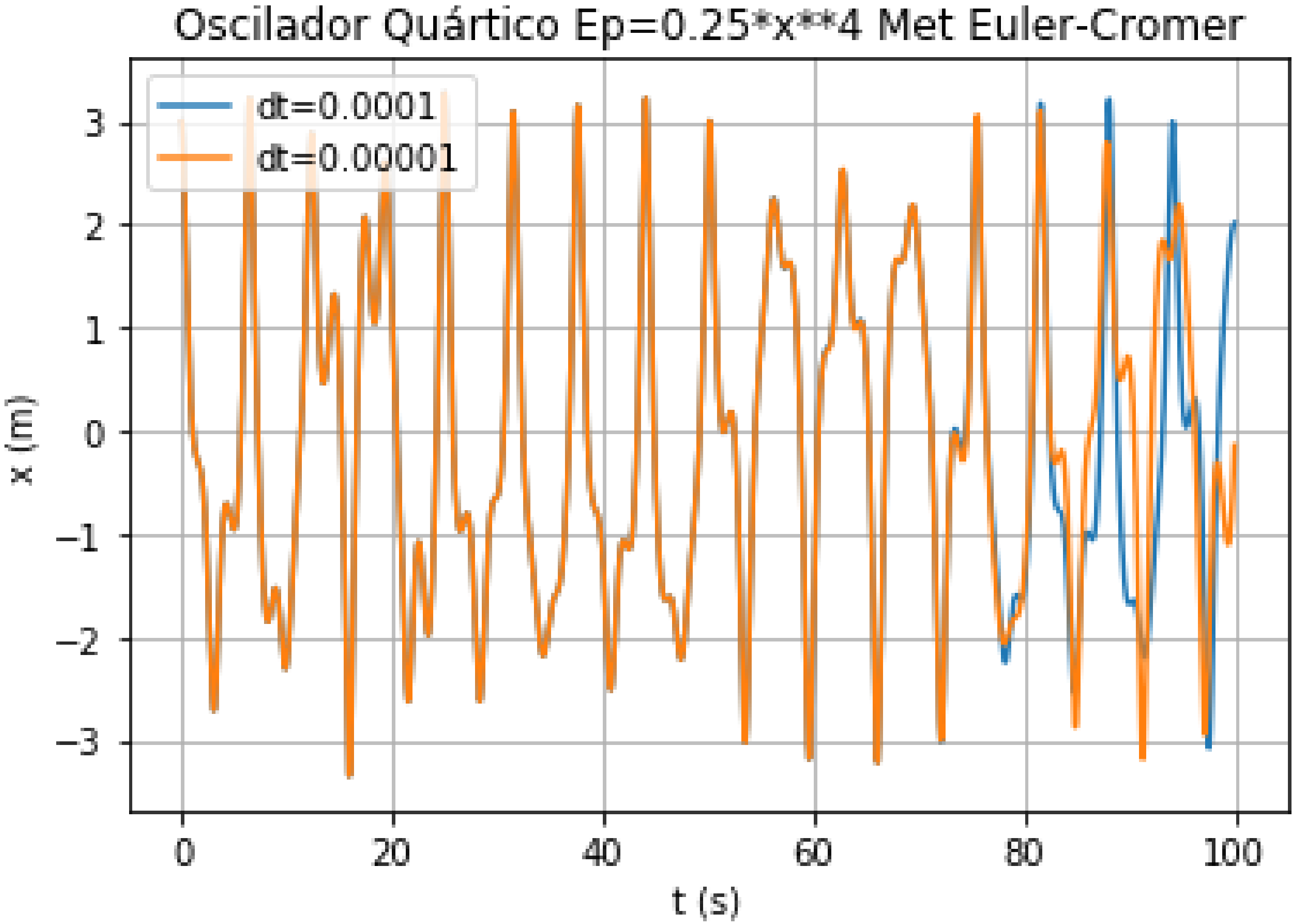
$b = 0.05$ kg/s

$F_0 = 7.5\ N \qquad \omega_f = 1$ rad/s

$\alpha = 0.25\ \mathrm{m}^{-2}$

$x(0) = 3.0000$ m
$v_x(0) = 0$

**Solução não converge!**



Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

Cálculo Numérico: **Método de Runge-Kutta de 4ª ordem**

$$a_x = -4\frac{\alpha}{m}x^3 - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

$k = 1$ N/m $\qquad m = 1$ kg

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$$

$b = 0.05$ kg/s

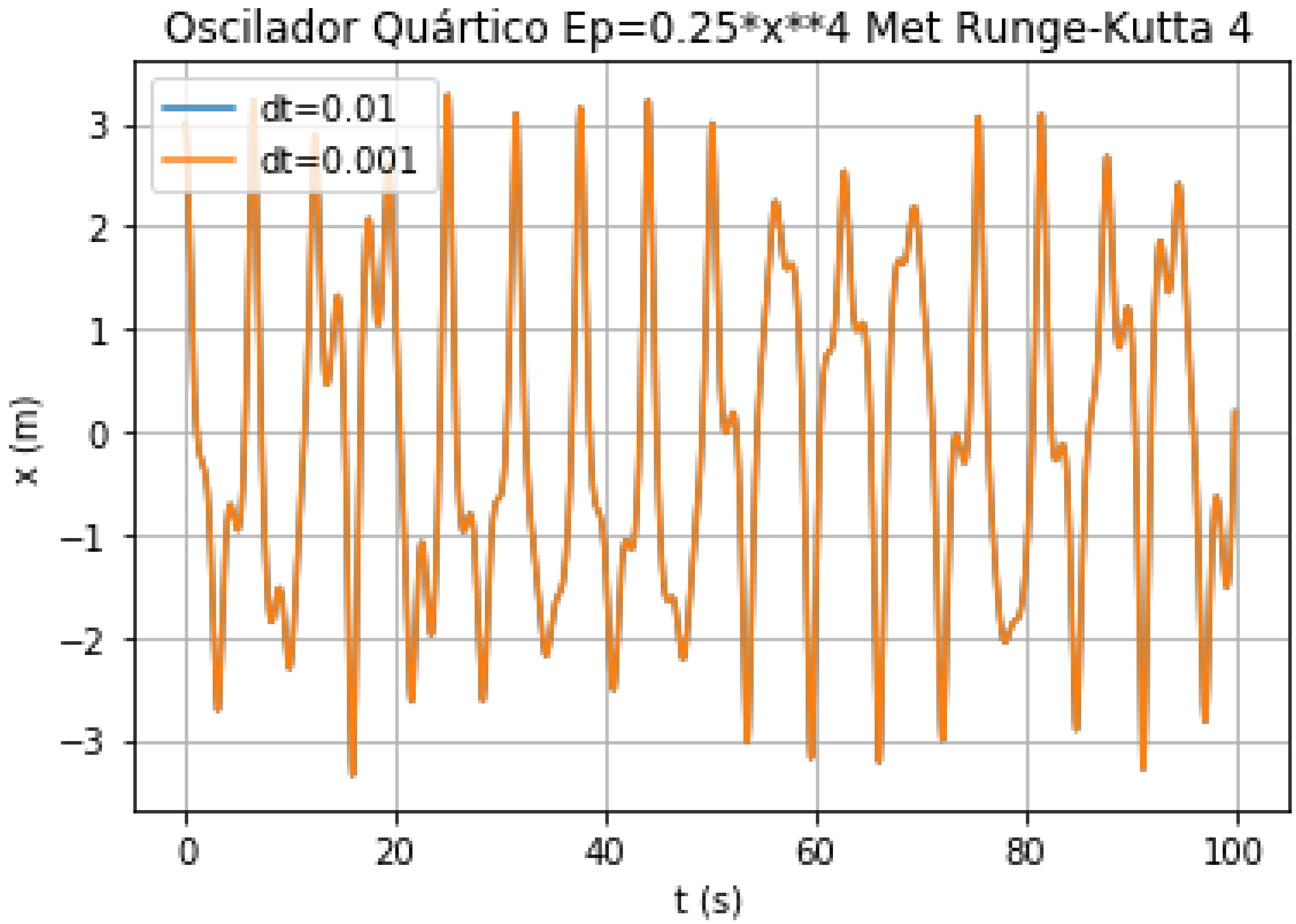
$F_0 = 7.5\ N \qquad \omega_f = 1$ rad/s

$\alpha = 0.25$ m$^{-2}$

$x(0) = 3.0000$ m

$v_x(0) = 0$

**Converge!**



Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$$

**Método de Euler**

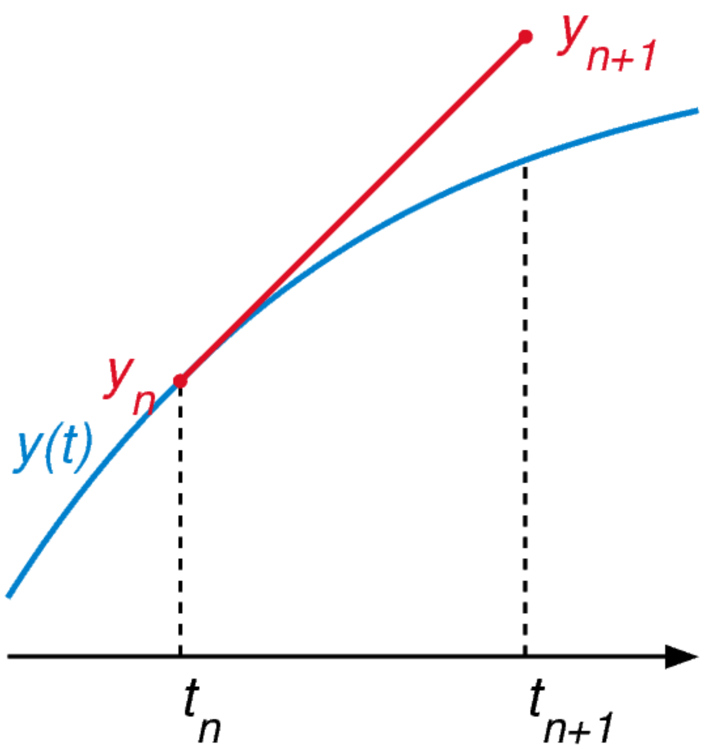
$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x\left(t, v_x(t)\right) \times \delta t$$

ou

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + c_1 \times \delta t$$

em que $$c_1 = a_x\left(t, v_x(t)\right)$$

Erro global $\mathcal{O}(\delta t)$



Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

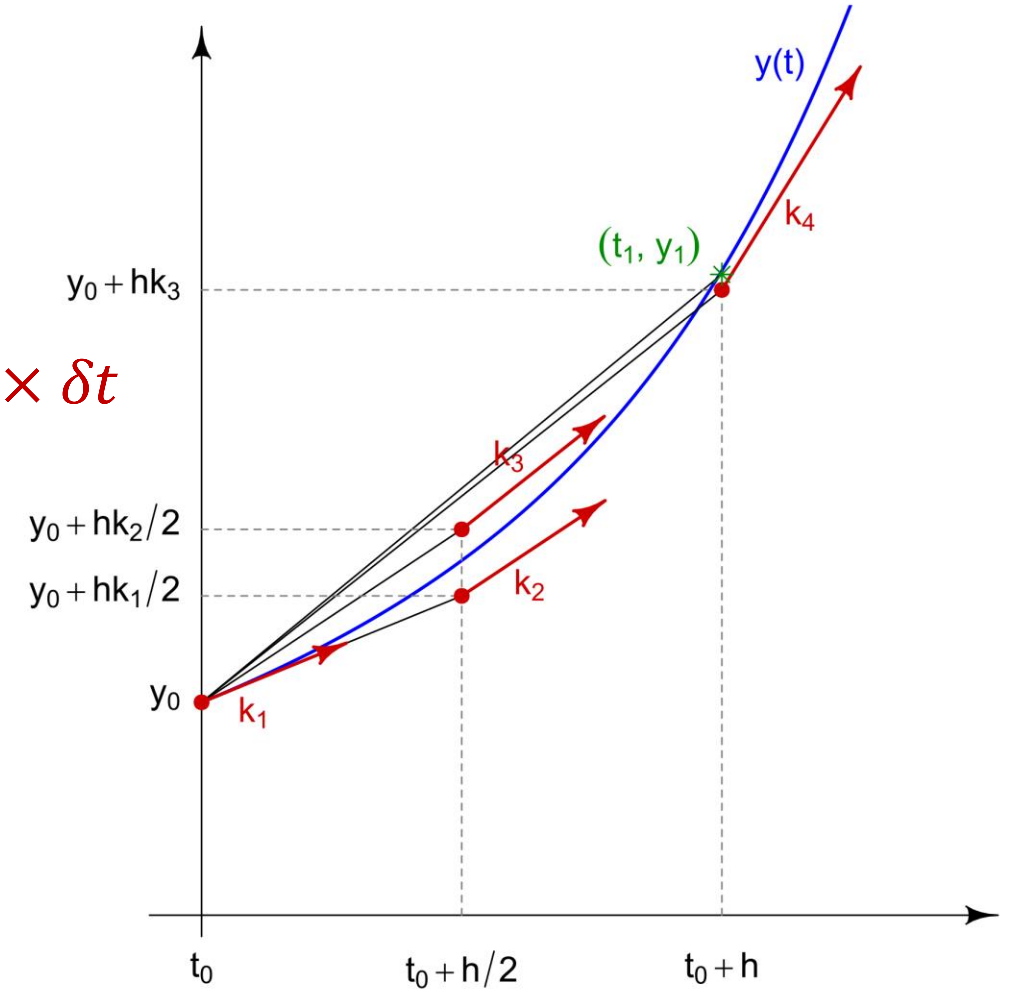
$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$$

## Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

em que

$$\begin{aligned} c_1 &= a_x\big(t, v_x(t)\big) \\ c_2 &= a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1 \frac{\delta t}{2}\right) \\ c_3 &= a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2 \frac{\delta t}{2}\right) \\ c_4 &= a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3\, \delta t) \end{aligned}$$




**Erro global $\mathcal{O}(\delta t^4)$**

# Integração Numérica pelo Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

No e-learning está a função

```
def rk4(t,vx,acelera,dt):
    """
    Integração numérica de equação diferencial de 2ª ordem:
                                dvx/dt = ax(t,vx)    de valor inicial
    Erro global:  proporcional a dt**4
    acelera=dvx/dt=Força(t,vx)/massa  : acelera é uma FUNÇÃO
    input:  t = instante de tempo
            vx(t) = velocidade
            dt = passo temporal
    output: vxp = vx(t+dt)
    """
```

Deve definir a **função de aceleração**, cujo nome é passado como argumento

# **Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado** (e com amortecimento fraco)

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$E_p = \alpha x^4$

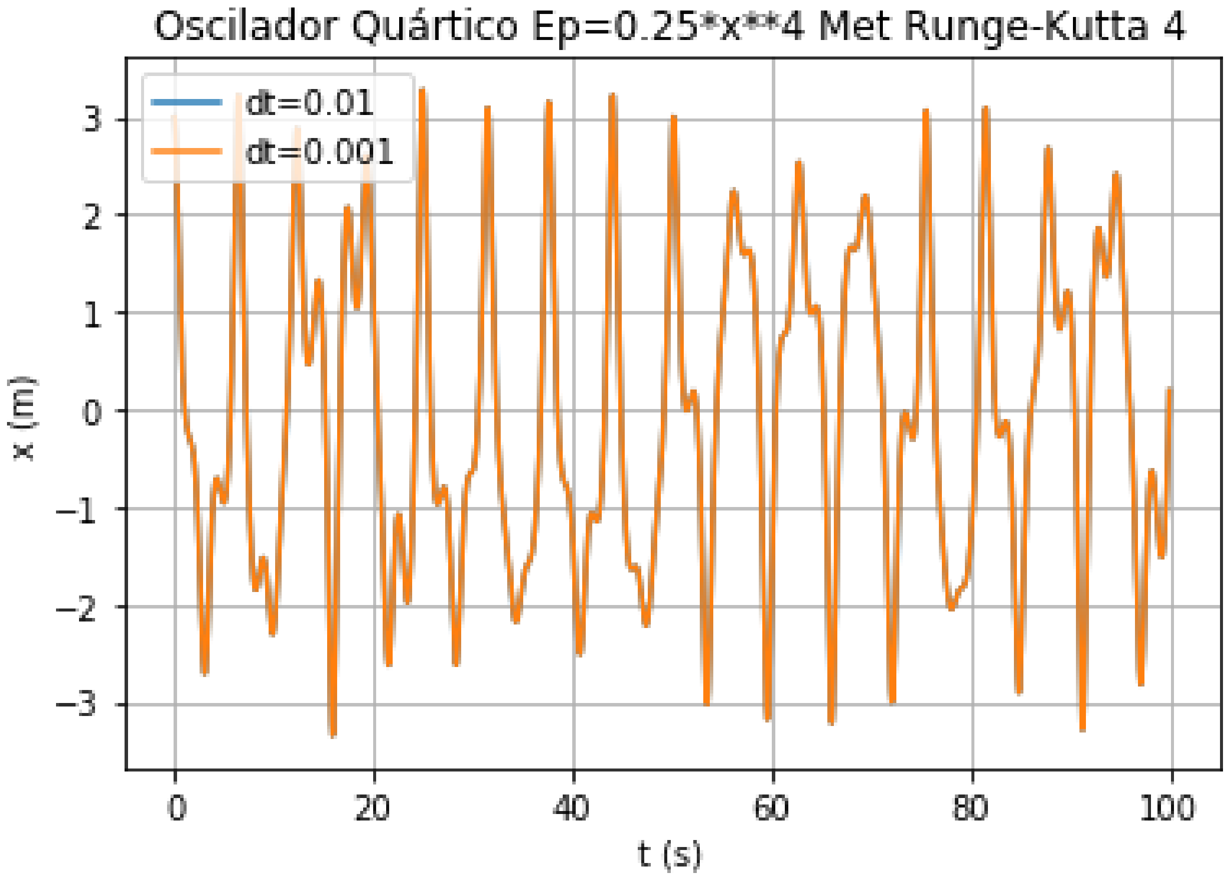
$k = 1$ N/m $\qquad m = 1$ kg

$b = 0.05$ kg/s

$F_0 = 7.5\ N \qquad \omega_f = 1$ rad/s

$\alpha = 0.25$ m$^{-2}$

$x(0) = 3.0000$ m
$v_x(0) = 0$




## **Caraterísticas:**

- A amplitude (posição máxima e mínima) não se mantêm constante
- O período (intervalo de tempo entre dois máximos de amplitude) não se mantêm constante

# **Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado** (e com amortecimento fraco)

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$E_p = \alpha x^4$

$k = 1$ N/m $\qquad m = 1$ kg

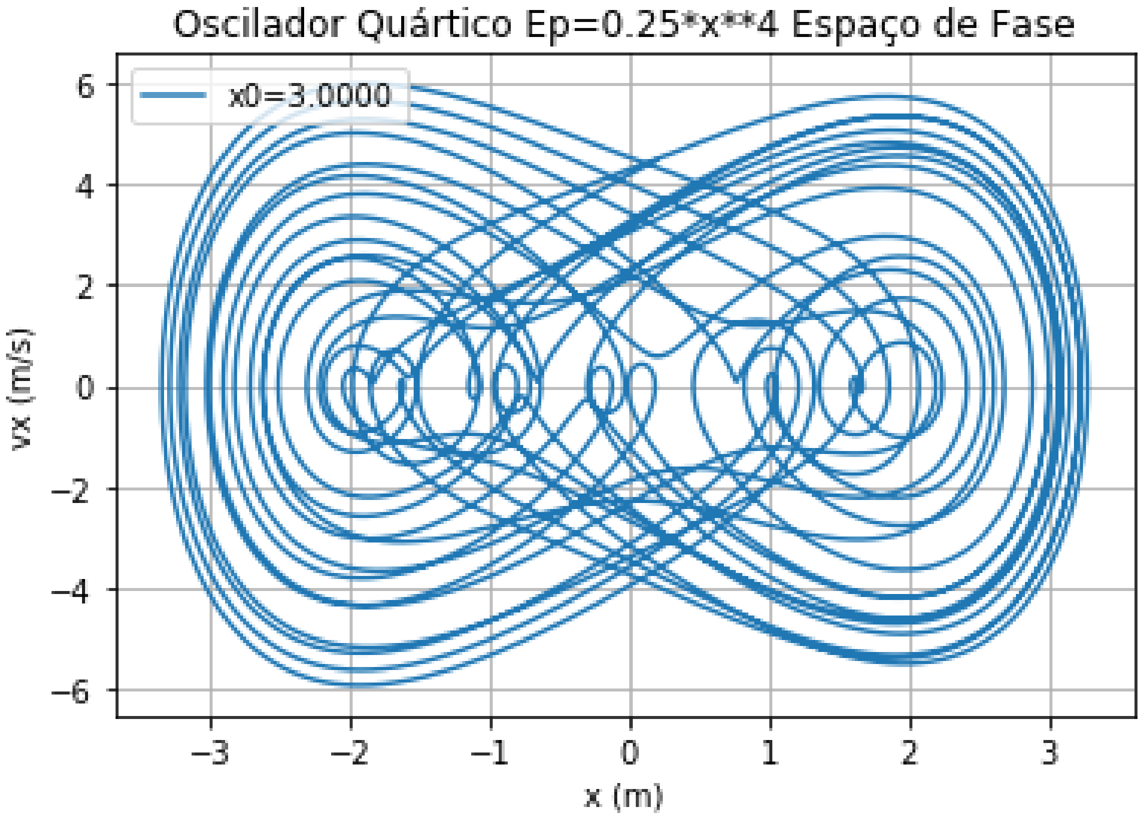
$b = 0.05$ kg/s

$F_0 = 7.5\ N \qquad \omega_f = 1$ rad/s

$\alpha = 0.25$ m$^{-2}$

$x(0) = 3.0000$ m
$v_x(0) = 0$

## Espaço de Fase

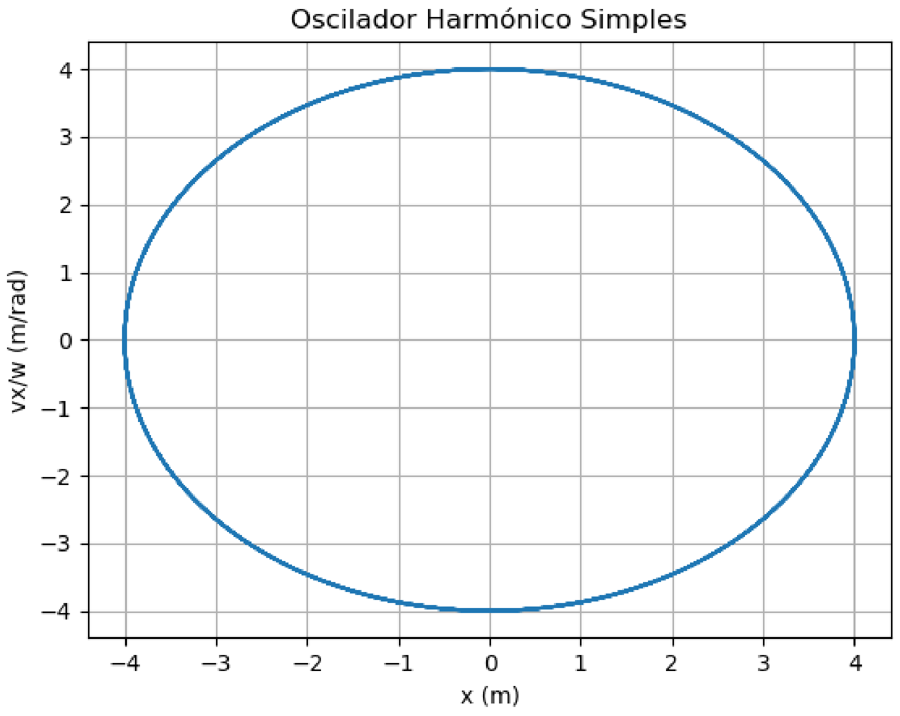



## Caraterísticas:

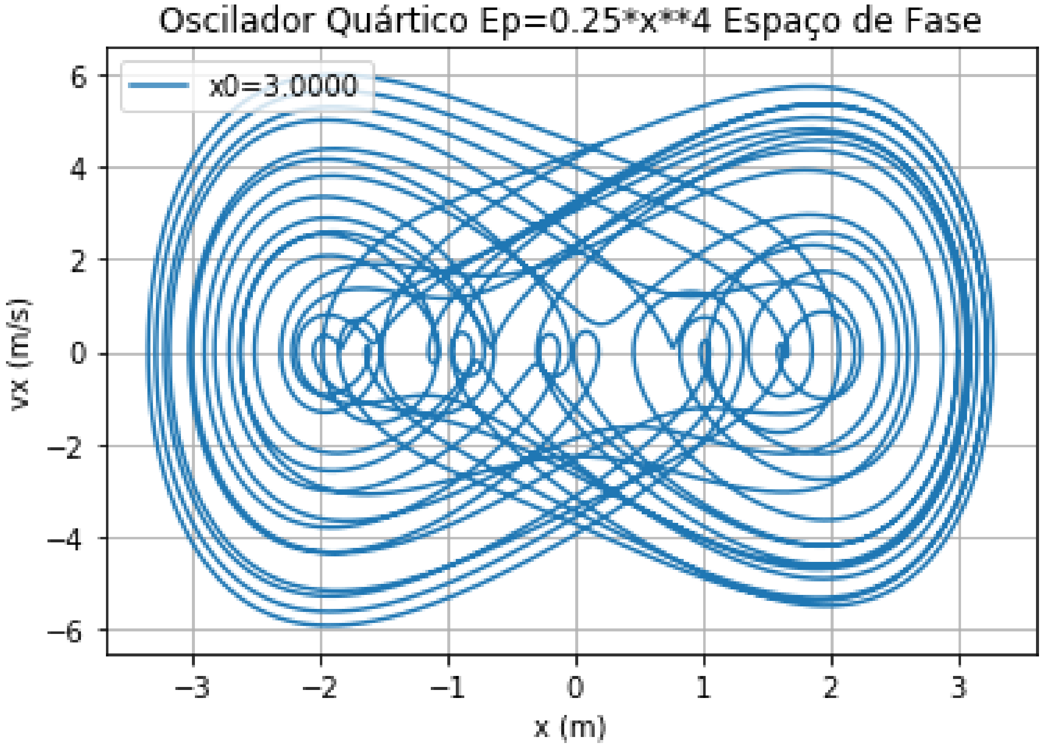
- A figura no espaço de fase é muito complexa

# Espaço de fase

Oscilador Harmónico Forçado e Amortecido




Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado e Amortecido

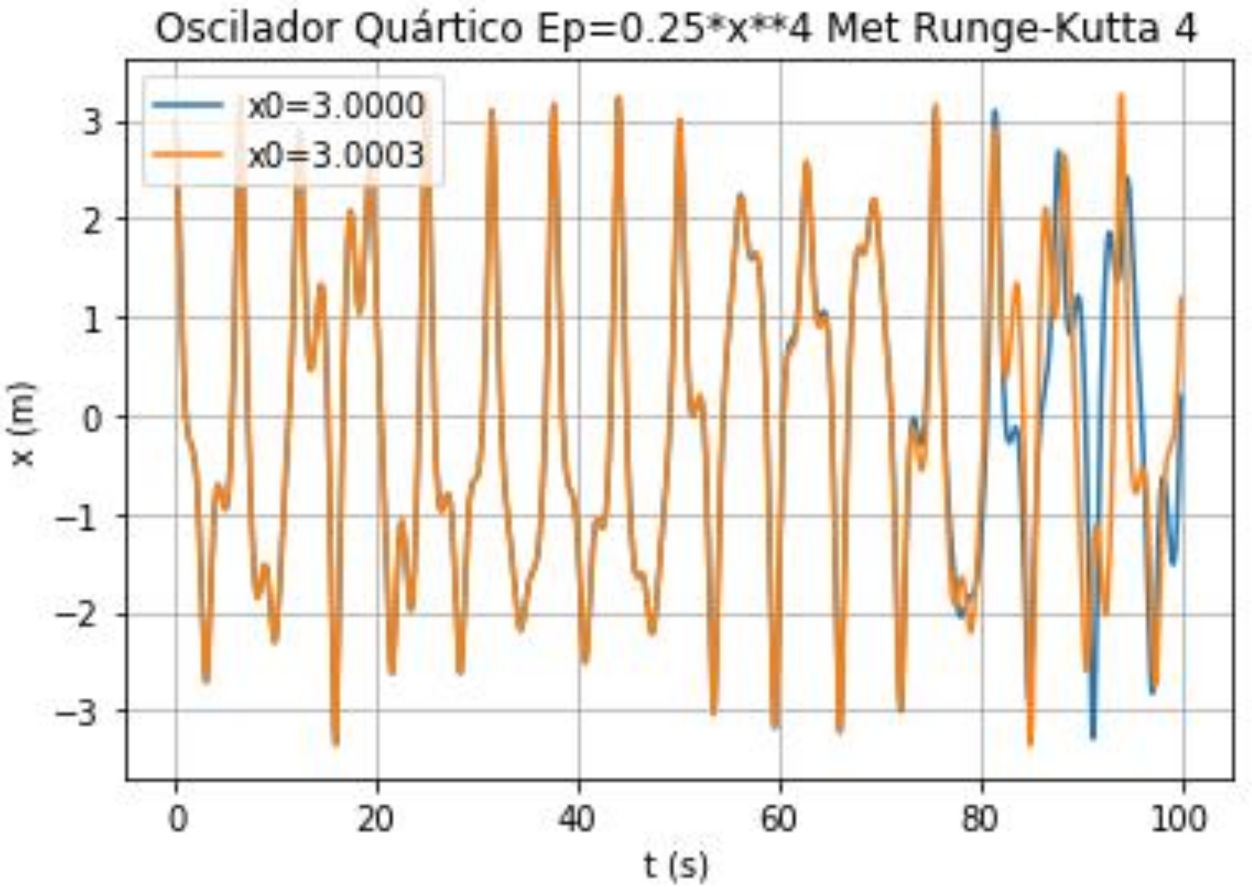



As duas trajetórias no espaço das fases contrastam imenso!

<u>Harmónico</u>: Trajetória fechada ( parte estacionária)
<u>Quártico</u>: A trajetória nunca se fecha!

# Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

<u>Método de Runge-Kutta de 4ª ordem</u>




**Condições iniciais extremamente próximas**

$\boldsymbol{x(0) = 3.0000}$ **m** e **3.0003 m**

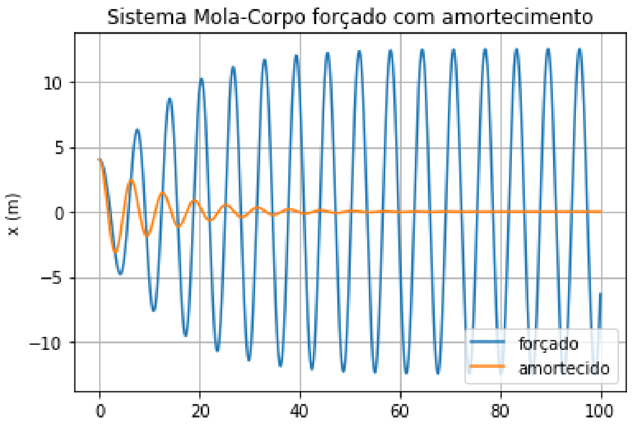
$v_x(0) = 0$

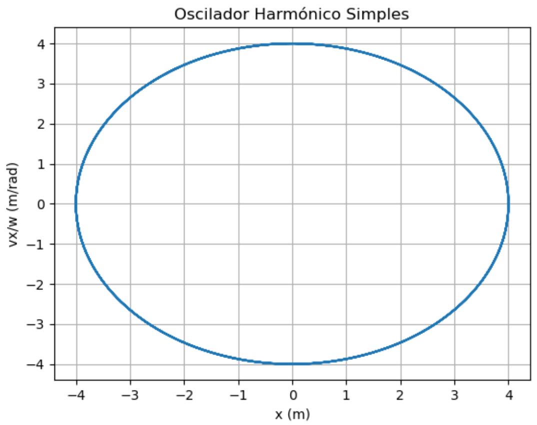
**Caraterísticas:**

- Soluções com <u>condições iniciais extremamente próximas</u> **DIVERGEM**!
- A diferença entre condições iniciais pode ser **menor que o erro experimental**
- **Apesar de a solução ser ÚNICA (para uma condição inicial), não se consegue calcular (prever) a evolução a médio prazo**

**Oscilador Harmónico Amortecido e Forçado** no regime estacionário:

- Insensíveis às condições iniciais
- Oscilação estável e regular

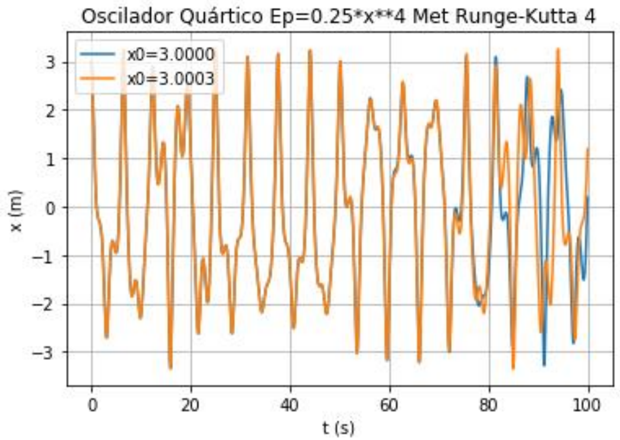


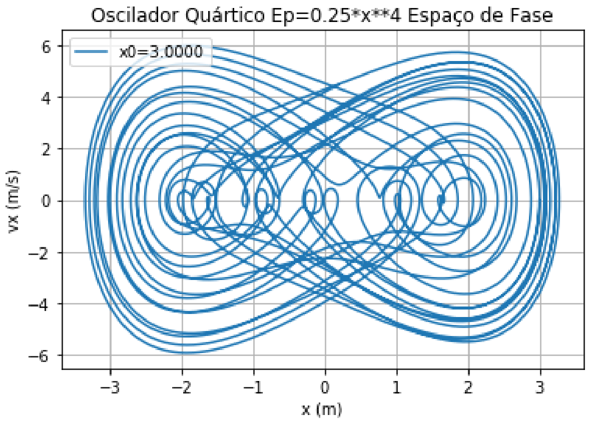




**Oscilador Quártico Amortecido e Forçado,**
para alguns parâmetros do ou seja  para <u>Forças não lineares:</u>

- Movimento irregular e variável
- Extrema sensibilidade às condições iniciais

**=  CAOS**



# Caos

Edward Norton Lorenz (1917-2008)

*"Quando o presente determina o futuro, mas o presente aproximado não determina aproximadamente o futuro."*

**Definição de Sistema caótico:**

1. Extrema sensibilidade às condições iniciais
2. Não periódico
3. Topologicamente transitivo

    trajetórios eventualmente passam em qualquer região do espaço

Nota: sempre movimento determinístico

# Equações de Lorenz

Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\,x\ - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy\ - bz \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = y_0 \\ z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

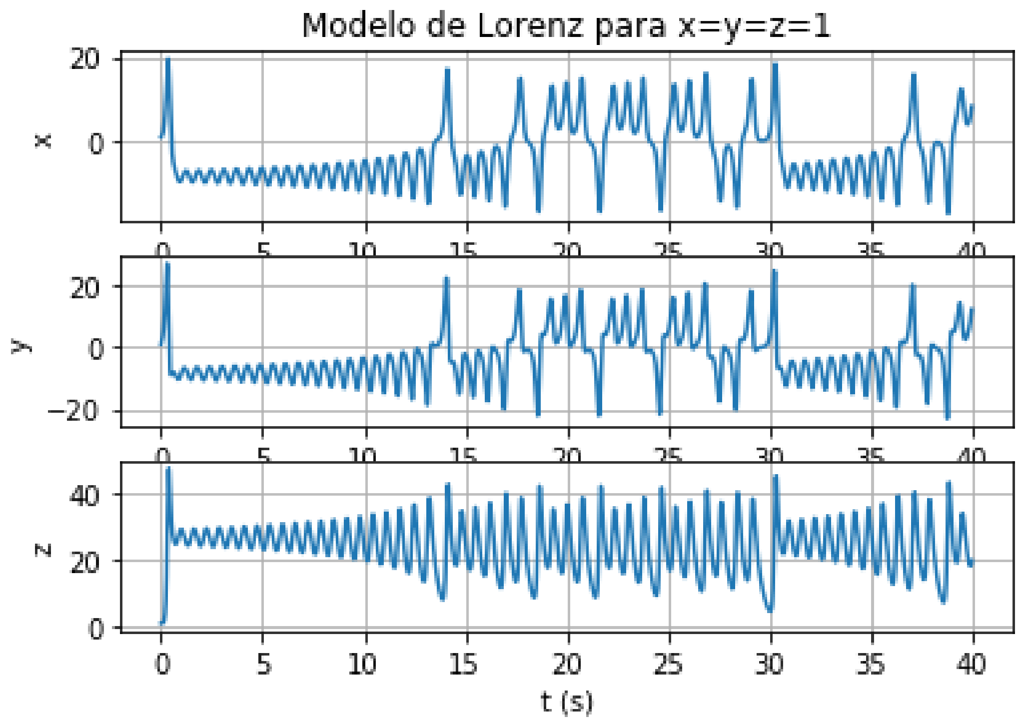
As variáveis $x, y$ e $z$ não possuem significado físico direto.

## Equações de Lorenz

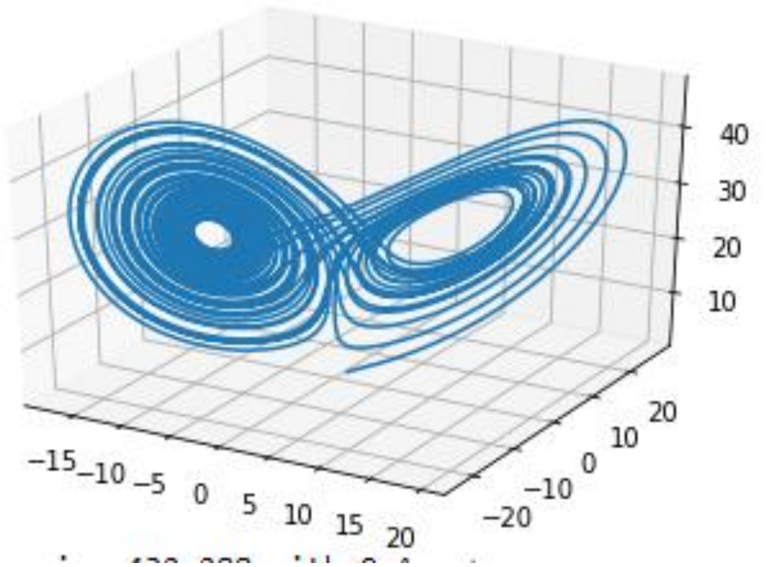
Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\,x\ - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy\ - bz \\ \quad x(t=0) = x_0 \\ \quad y(t=0) = y_0 \\ \quad z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

$$\sigma = 10; b = \frac{8}{3}; r = 28;$$



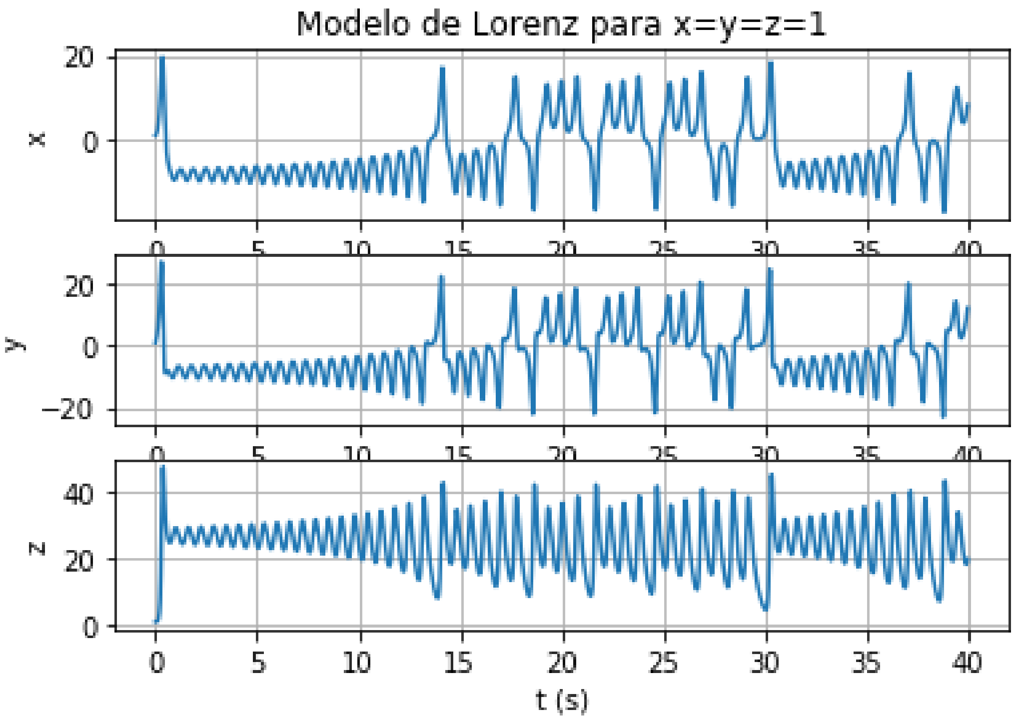

Espaço de fase

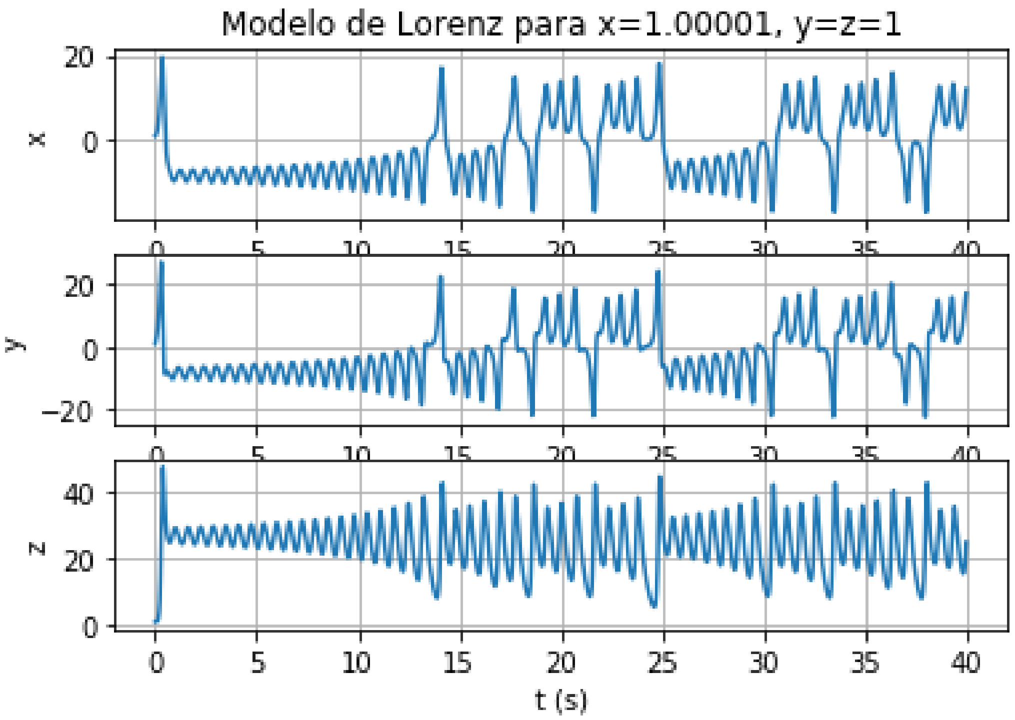


Solução não periódica e irregular

## Equações de Lorenz

Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.



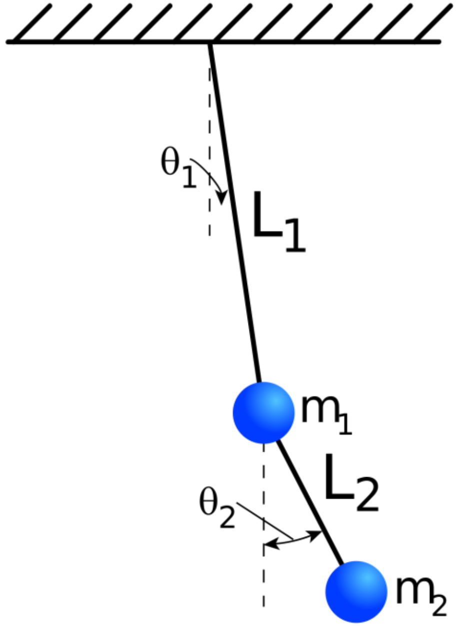




3 equações em 3 variáveis

Estas equações de Lorenz possuem uma <u>extrema sensibilidade às condições iniciais:</u>

**= CAOS**

# Duplo Pêndulo




Análise das forças, (gravidade e tensão nas ligações)
Relações entre posições x e y e ângulos $\theta$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{-g(2m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 g\sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\sin(\theta_1 - \theta_2)m_2[L_2{\omega_2}^2 + L_1\cos(\theta_1 - \theta_2)\,{\omega_1}^2]}{L_1[2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2)]}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)[L_2 m_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\,{\omega_2}^2 + L_1\,(m_1 + m_2){\omega_1}^2 + \mathrm{g}(m_1 + m_2)\cos\theta_1]}{L_2[2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2)]}$$

$$\theta_1(t = 0) = \theta_{10}$$
$$\theta_2(t = 0) = \theta_{20}$$
$$\omega_1(t = 0) = \omega_{10}$$
$$\omega_2(t = 0) = \omega_{20}$$

4 equações em 4 variáveis

https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html

**Teorema de Poincaré-Bendixon**:

O caos não pode ser observado em sistemas autónomos* bidimensionais:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

Ex: oscilador harmônico simples, pêndulo simples...

Note: as funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ não dependem do tempo, a variável independente.

* autónomos = não tem dependência explícita do tempo

**Teorema de Poincaré-Bendixon:**
O caos não pode ser observado em sistemas autónomos bidimensionais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Não é o caso das (3) **equações de Lorenz**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r\,x\ - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy\ - bz \end{cases}$$

nem do caso das (4) equações do **duplo pêndulo**

e o **Osc. Quártico** Amortecido e Forçado?

são apenas 2 equações mas **não autónomas**
(forçamento depende de tempo)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = a(x, v, t) \end{cases}$$

podem ser escritos como 3 autónomas com

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = a(x, v, y) \\ \frac{dy}{dt} = 1 \end{cases}$$