Departamento de Física
Universidade de Aveiro

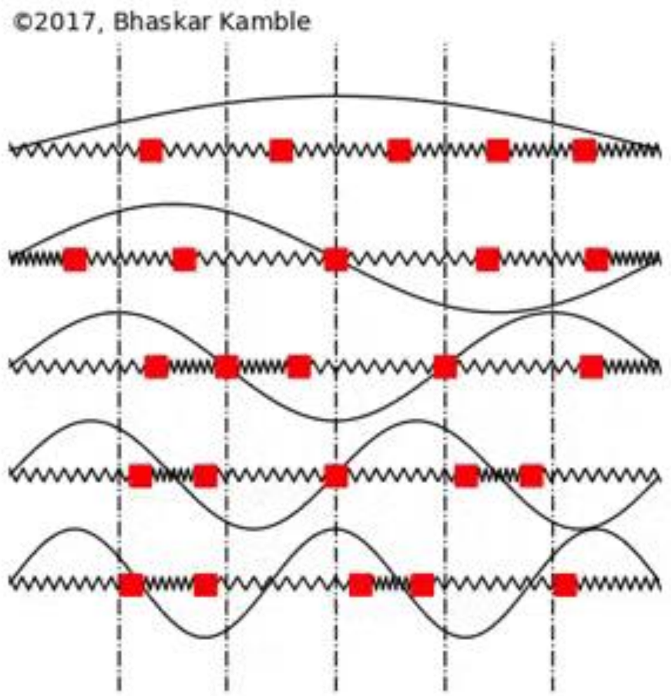
Modelação de Sistemas Físicos

Cap. 6

Osciladores acoplados: Modos Normais e Ondas

Bibliografia:

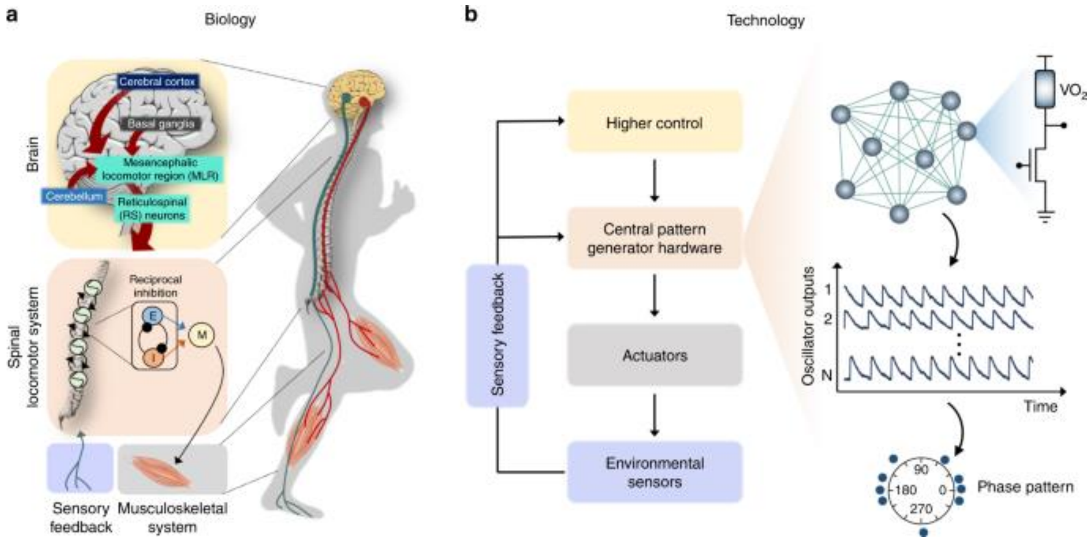
Osciladores Acoplados e Ondas

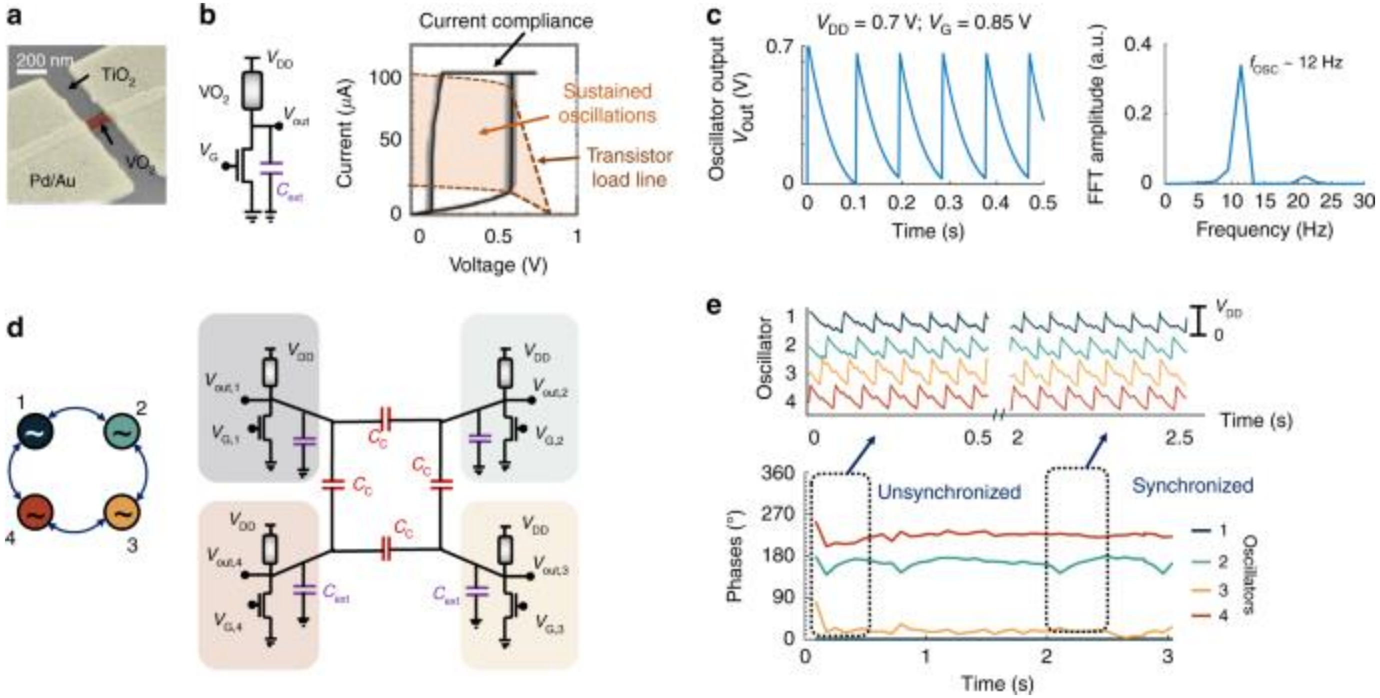


Waves and oscillations (bhaskar-kamble.github.io)

MSF 2025 - T6

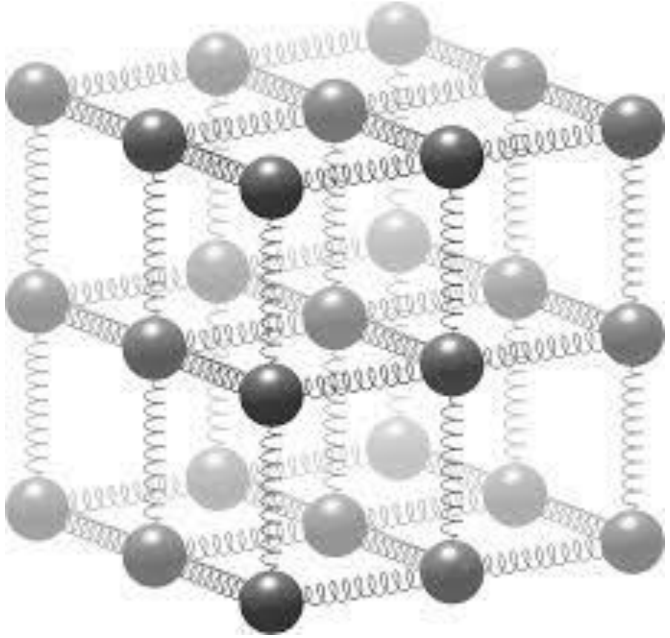
Programmable coupled oscillators for synchronized locomotion,
Dutta et al., *Nature Communications*, 2019





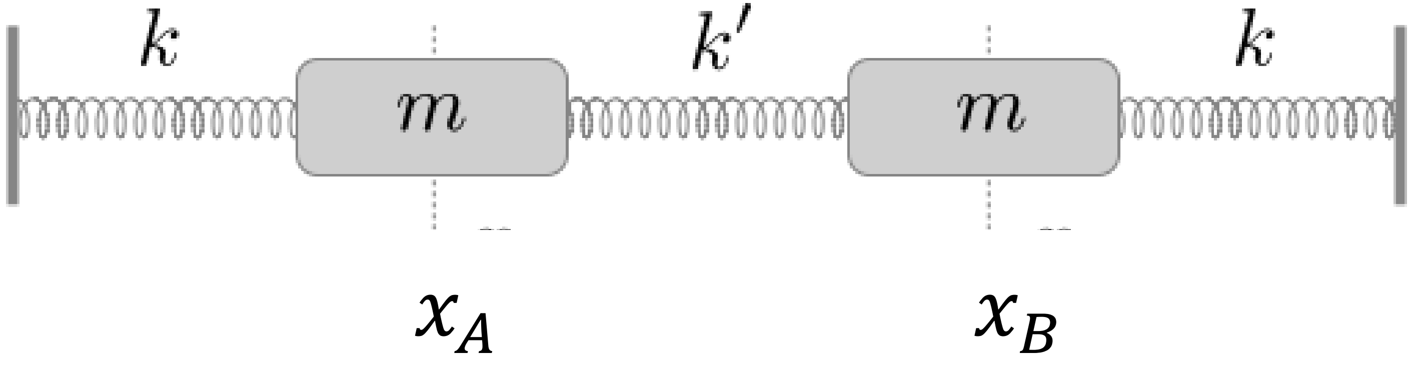
MSF 2025 - T6

Modelos da matéria



Osciladores Acoplados

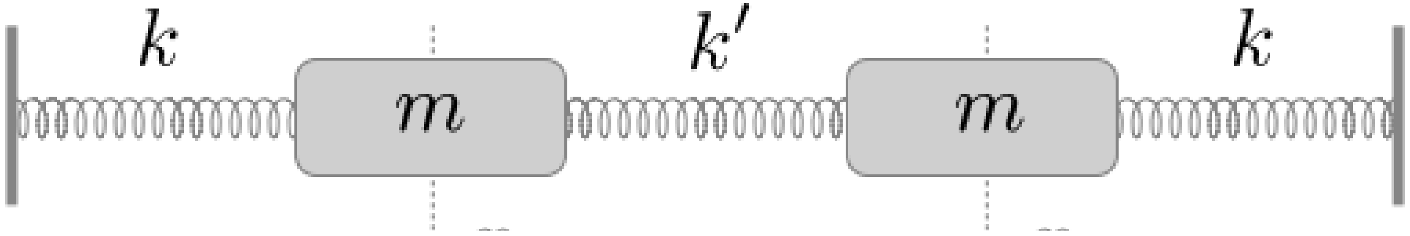
2 corpos A e B. Cada um ligado a um ponto fixo através de molas de constante elástica k. Acoplados através de uma mola de constante elástica k'.



Como é o movimento?
Existem oscilações regulares?
Com que frequências?

Osciladores Acoplados

2 corpos A e B. Cada um ligado a um ponto fixo através de molas de constante elástica k.
Acoplados através de uma mola de constante elástica k'.

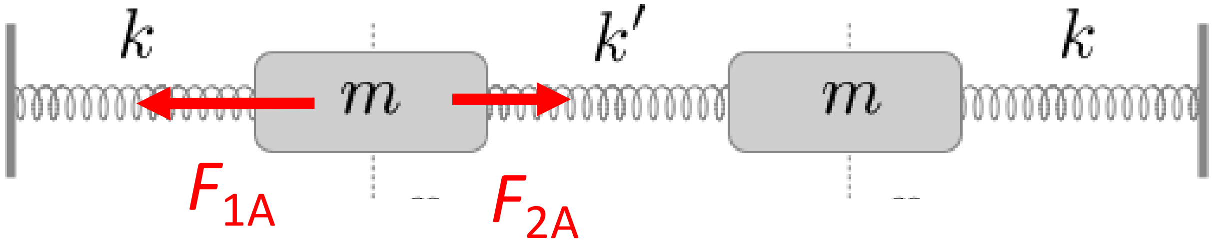


x_A x_B

<u>Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 2 corpos:</u>

1. Que forças aplicada a cada um dos corpos?
2. Equação dinâmica de Newton para cada corpo
3. Resolver a eq. dinâmica pelo método de Euler-Cromer (oscilações)

Osciladores Acoplados



$$x_A \qquad\qquad x_B$$

<u>1. Que forças aplicada a cada um dos corpos?</u>

Corpo A:

$$F_{1A} = -k(x_A - x_{Aeq})$$

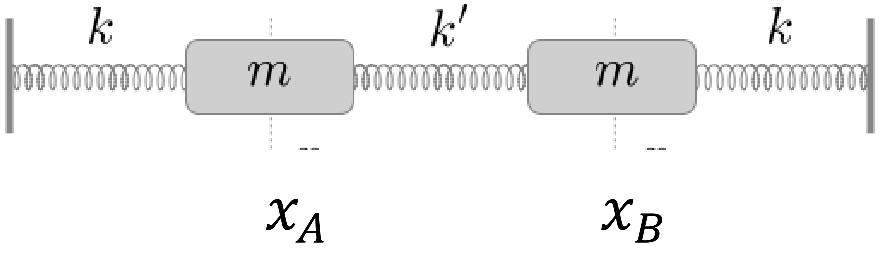
$$F_{2A} = -k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$$

Corpo B:

$$F_{3B} = -k(x_B - x_{Beq})$$

$$F_{2B} = +k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})] = -F_{2A}$$

Osciladores Acoplados



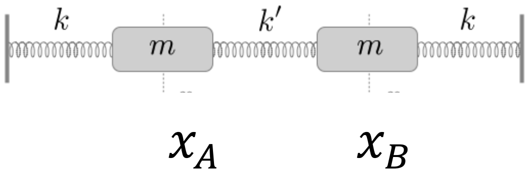
2. Equação dinâmica de Newton para cada corpo

Corpo A $$m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left[\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right]$$

Corpo B $$m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left[\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right]$$

Note: as equações estão acopladas: Na equação do corpo A aparece a coordenada do corpo B

Osciladores Acoplados



Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\,(x_B - x_{Beq}) + k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right)$

3. Cálculo Numérico:

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$

$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\ \ x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}$

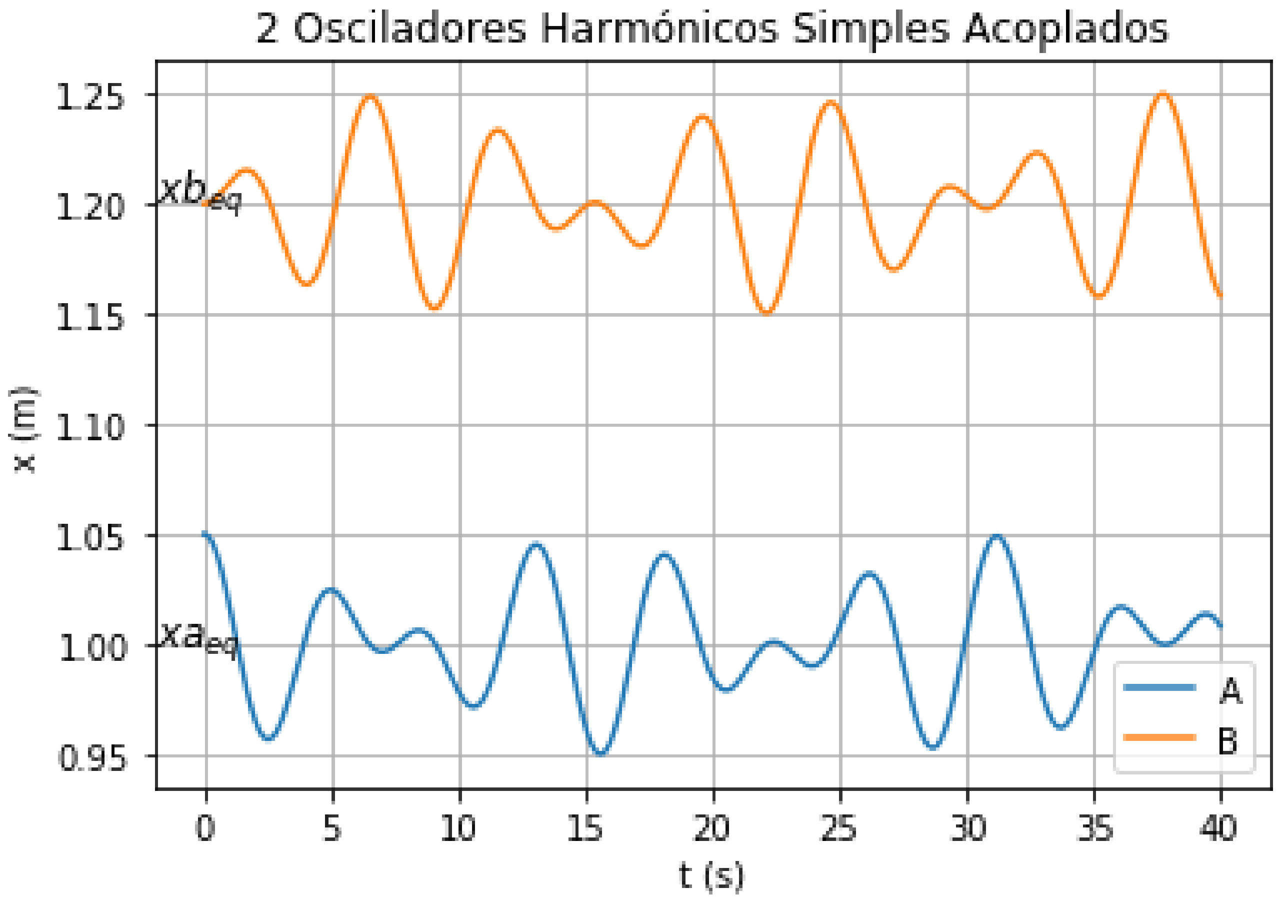
$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\ \mathrm{m}$

$x_{B0} = x_{Beq}$

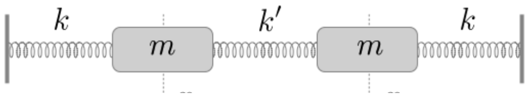
$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Movimento não parece periódico.

Temos de aumentar o instante final para se verificar se existe repetição.



Osciladores Acoplados



x_A $\quad$ x_B

Corpo A $\quad m\,\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right)$

Corpo B $\quad m\,\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\,(x_B - x_{Beq}) + k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right)$

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $m = 1$ kg ; $x_{Aeq} = 1.0$ m $\;x_{Beq} = 1.2$ m

<u>Condições iniciais:</u>

Igualmente afastados das suas posições de equilíbrio

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

$x_{B0} = x_{Beq} + 0.05$ m

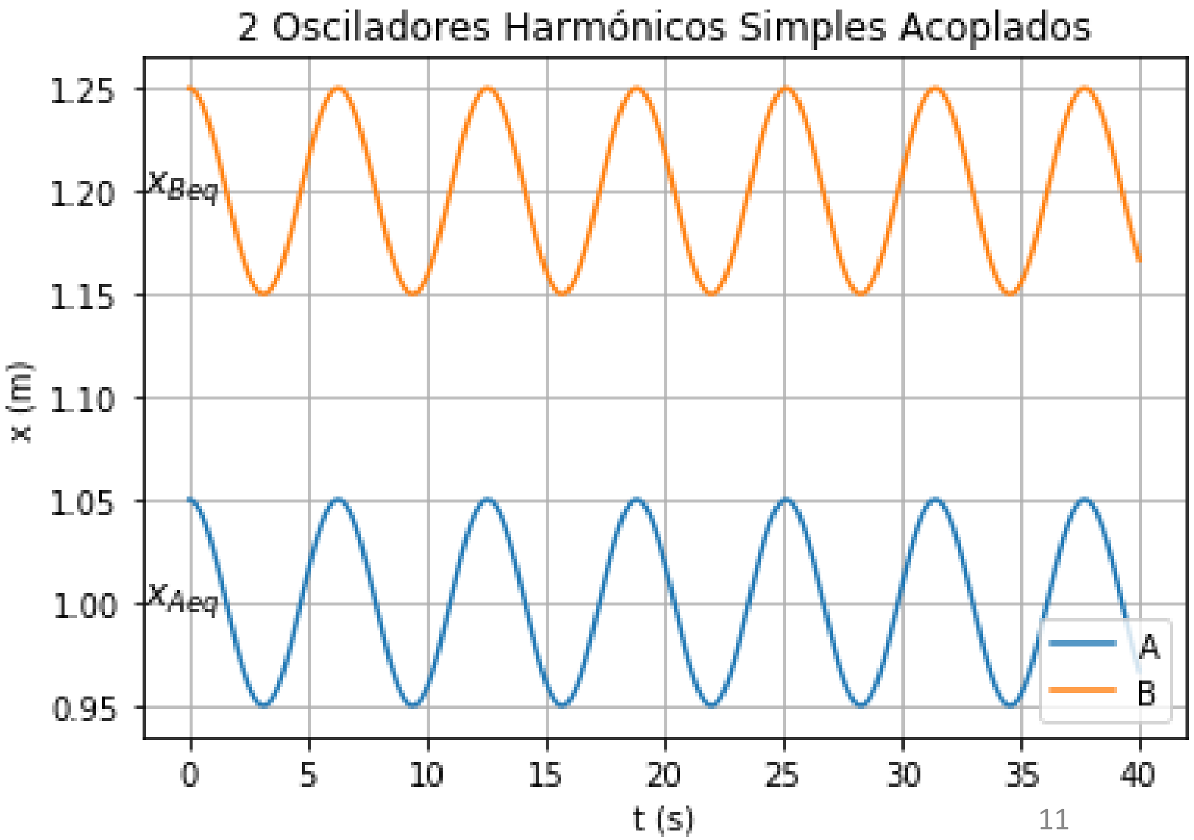
$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

A mola do meio não interfere

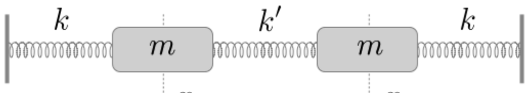
Movimento periódico harmónico

T= 6.283 s $\quad A = x_{eq} + 0.05$ m

$\omega_1 = 1$ rad/s



Osciladores Acoplados



Corpo A $\quad m\,\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\,\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg ; $x_{Aeq} = 1.0$ m $\ x_{Beq} = 1.2$ m

<u>Condições iniciais:</u>

Igualmente afastados das suas posições de equilíbrio

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

$x_{B0} = x_{Beq} - 0.05$ m

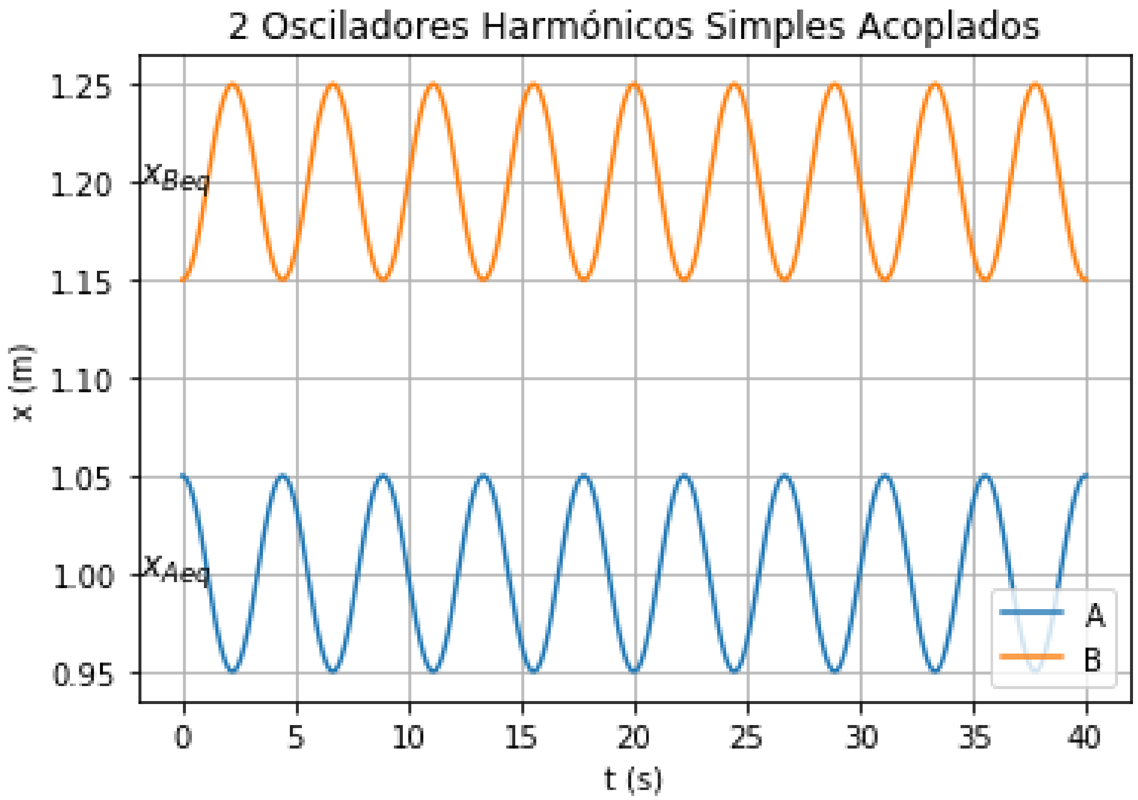
$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Corpos com movimento em espelho

Movimento periódico harmónico

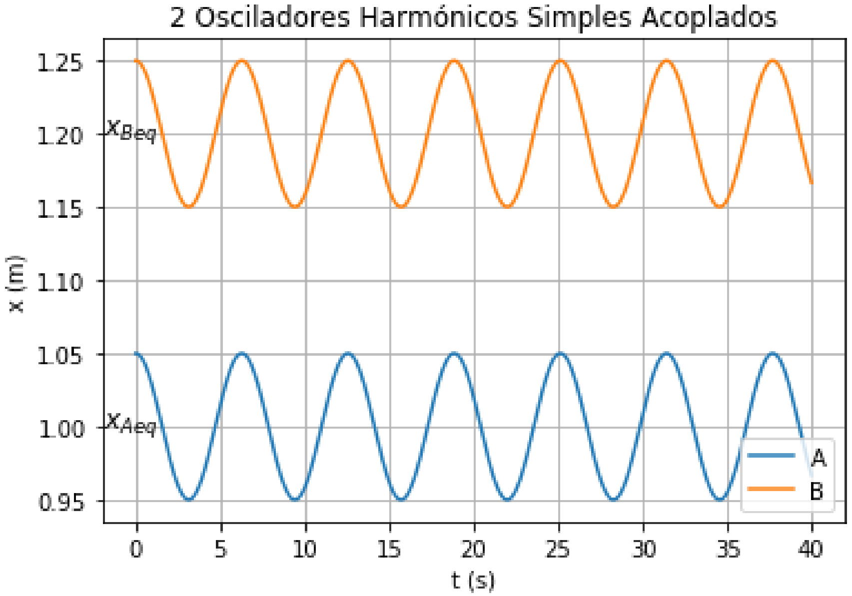
T= 4.442 s $\quad A = x_{eq} + 0.05$ m

$\omega_2 = 1.414$ rad/s



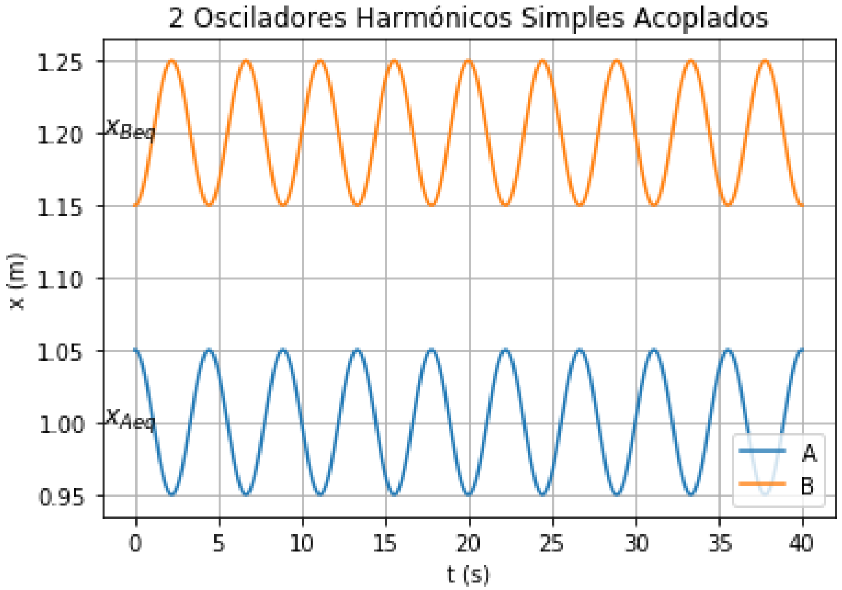
Modos Normais

Modo normal 1 $\omega_1 = 1$ rad/s



$$x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

Modo normal 2 $\omega_2 = 1.414$ rad/s



$$x_A = x_{eqA} + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_B = x_{eqB} - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Temos encontrado 2 soluções com movimento sinusoidal simples

Correspondem a certos condições iniciais

E os outros casos?

Modos Normais

Sobreposição dos dois modos normais

Equações do movimento

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Substituindo

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Obtêm-se $\qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad$ e $\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$

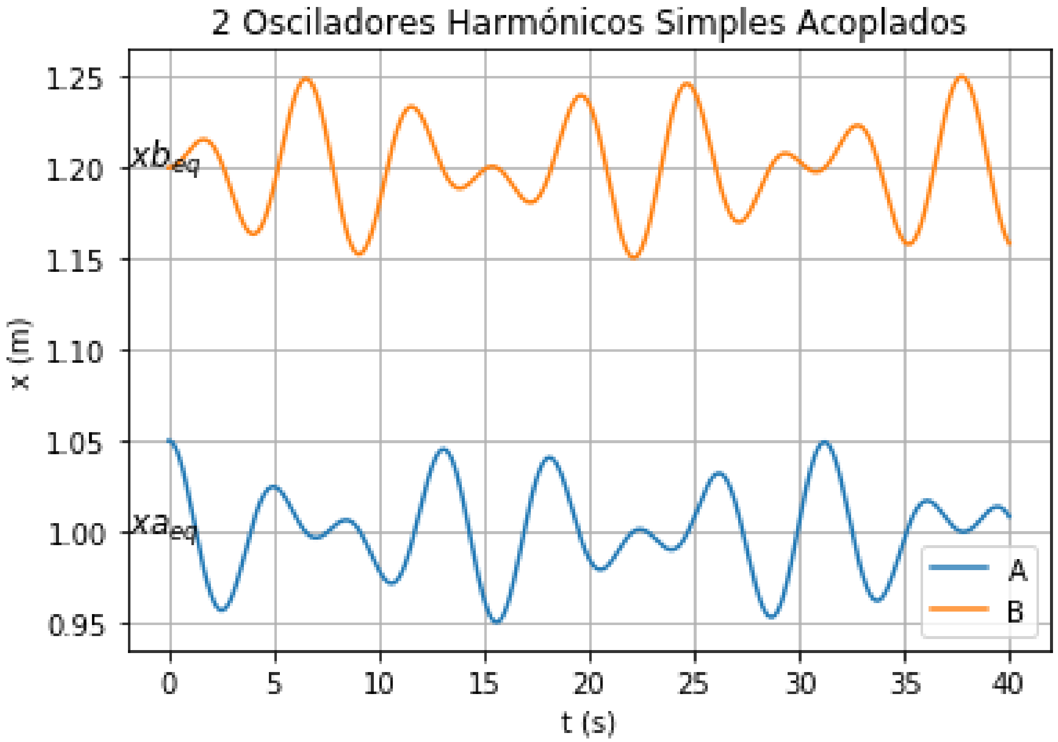
Qualquer sobreposição dos dois modos normais é solução válida.

Modos Normais

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\; x_{Aeq} = 1.2$ m



<u>Condições iniciais:</u>

$\boldsymbol{x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05}$ **m**

$\boldsymbol{x_{B0} = x_{Beq}}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Movimento não periódico

É uma sobreposição dos modos normais?

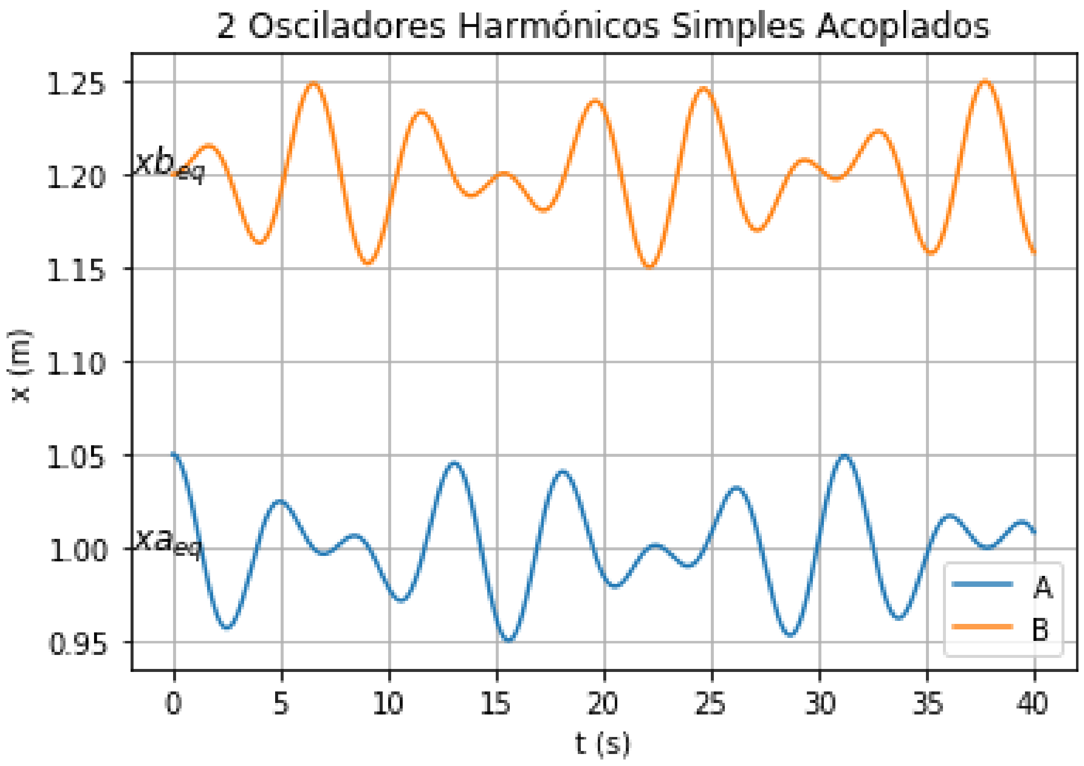
$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} ?$$

Modos Normais

$\boldsymbol{x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05}$ **m**

$x_{B0} = x_{Beq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$



Proposta de solução:

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ v_{xA} = -\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ v_{xB} = -\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Com $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k\prime}{m}}$

Encontrar valores para as amplitudes e as fases: A_1, A_2, ϕ_1 e ϕ_2

para t = 0

$$\begin{cases} x_{eqA} + 0.05 = x_{eqA} + A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2) \\ x_{eqB} = x_{eqB} + A_1 \cos(\phi_1) - A_2 \cos(\phi_2) \\ 0 = -\omega_1 A_1 \sin(\phi_1) - \omega_2 A_2 \sin(\phi_2) \\ 0 = -\omega_1 A_1 \sin(\phi_1) + \omega_2 A_2 \sin(\phi_2) \end{cases}$$

4 equações a 4 incógnitas.

$\phi_1 = \phi_2 = 0$ e $A_1 = A_2 = 0.025$ m

Obedece as equações de movimento, e concorda com as condições iniciais ⇒ deve ser a solução

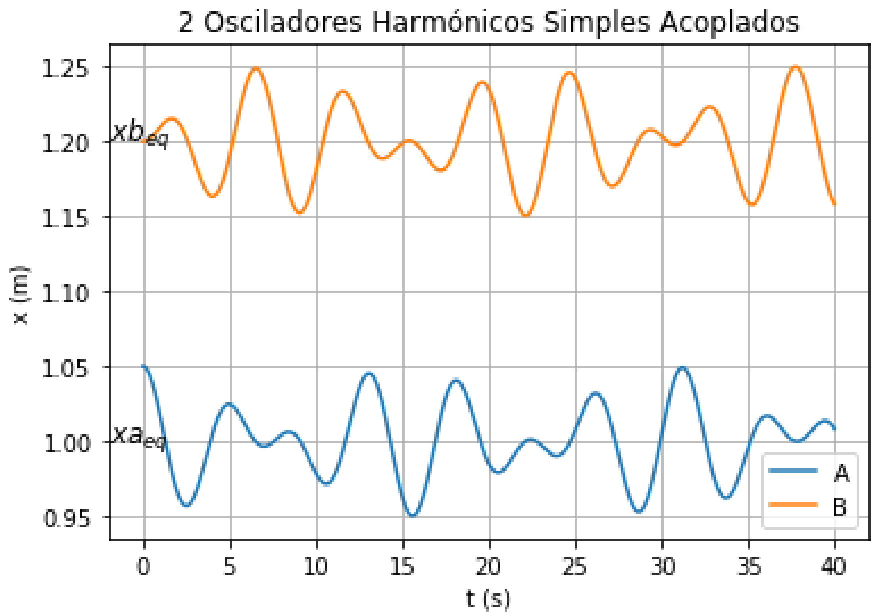
Modos Normais

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\; x_{Aeq} = 1.2$ m

Ex. $\phi_1 = \phi_2 = 0$ e $A_1 = A_2 = 0.025$ m



Solução geral:

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

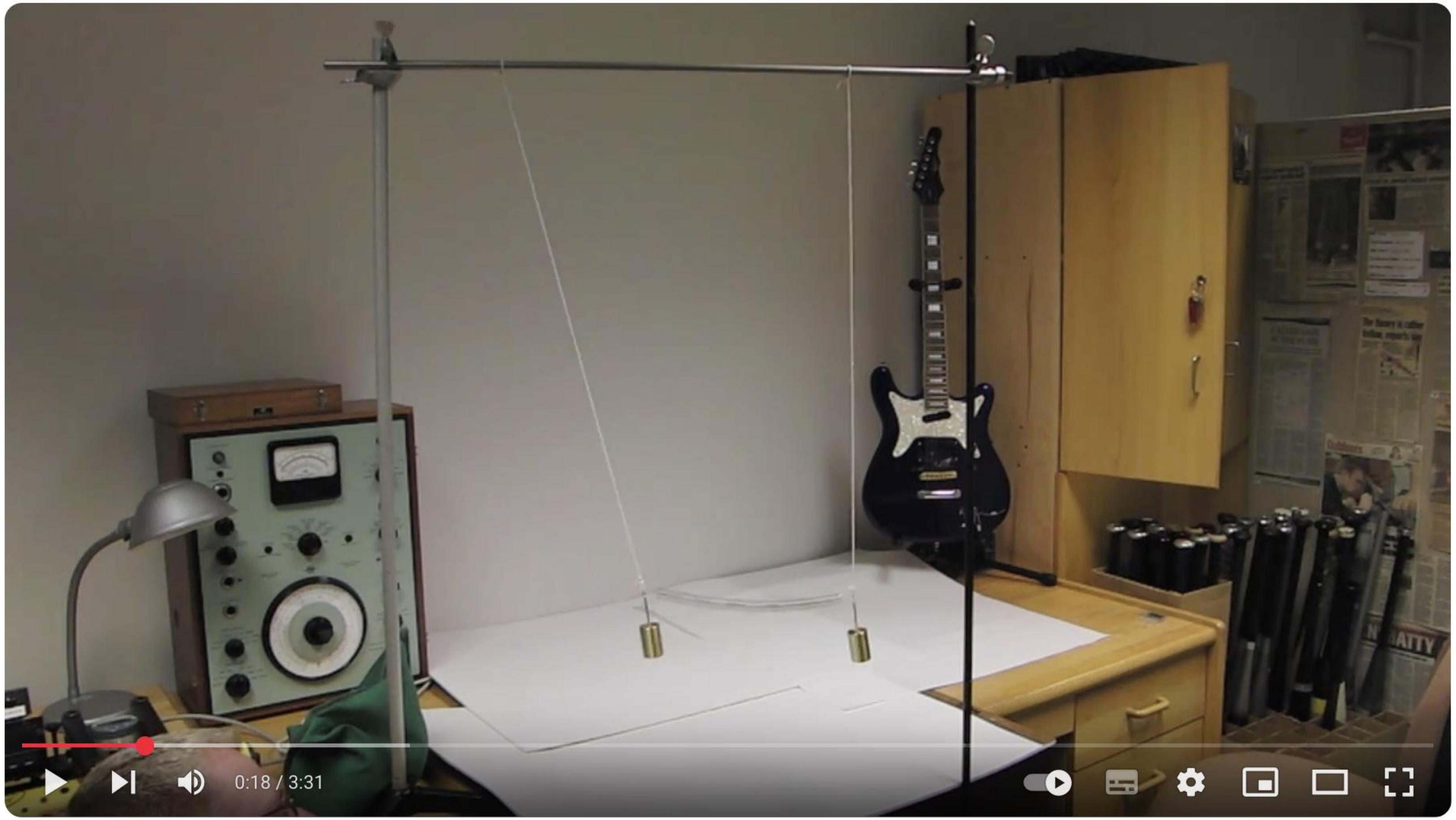
Com $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$

A_1, A_2, ϕ_1 e ϕ_2 encontrados das condições iniciais

Qualquer movimento de 2 corpos acoplados por interação elástica é uma sobreposição de MODOS NORMAIS

Movimento (aparentemente) não periódico é sobreposição de 2 movimentos harmónicos de frequências diferentes

Modos Normais



https://www.youtube.com/watch?v=YyOUJUOUvso

Acoplamento Fraco

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\; x_{Aeq} = 1.2$ m

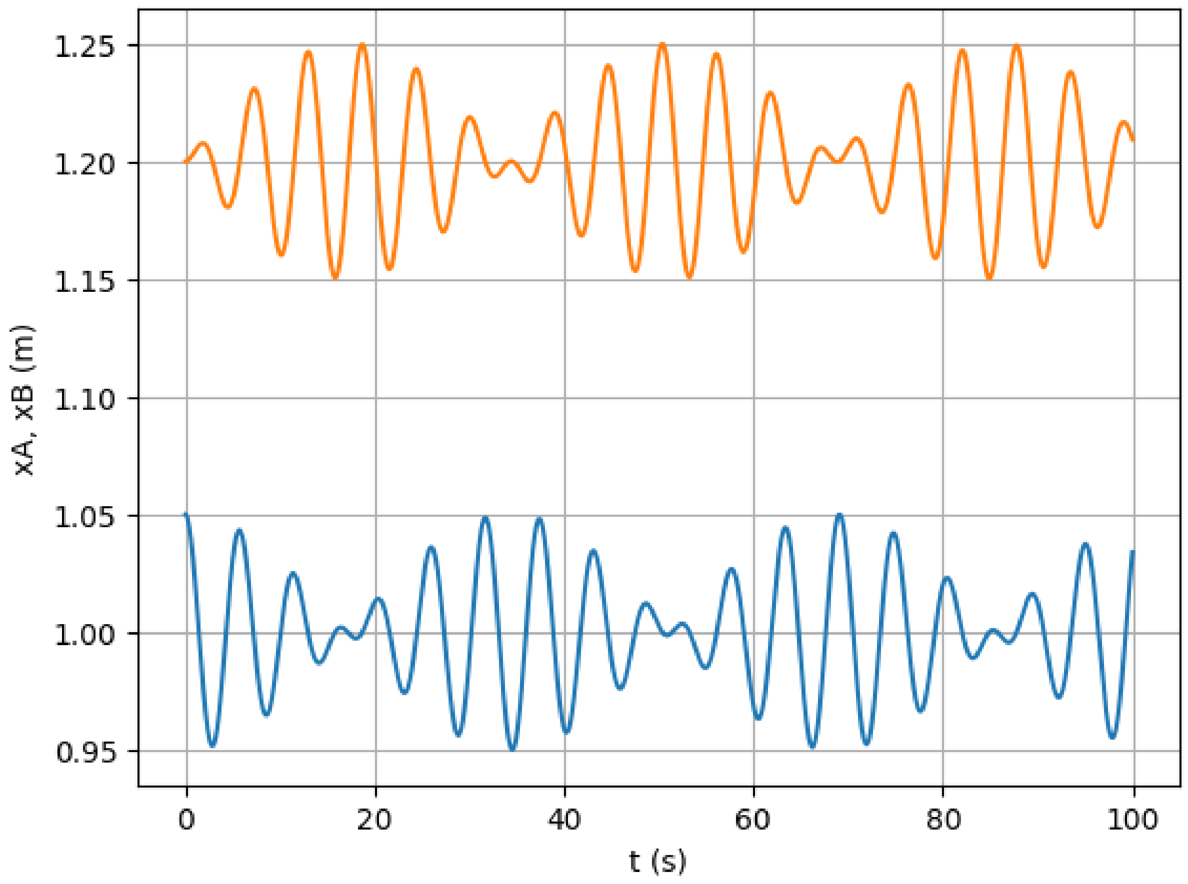
$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; k' = 0.2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1$ kg

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

$x_{B0} = x_{Beq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad$ e $\; A_1 = A_2 = 0.025$ m

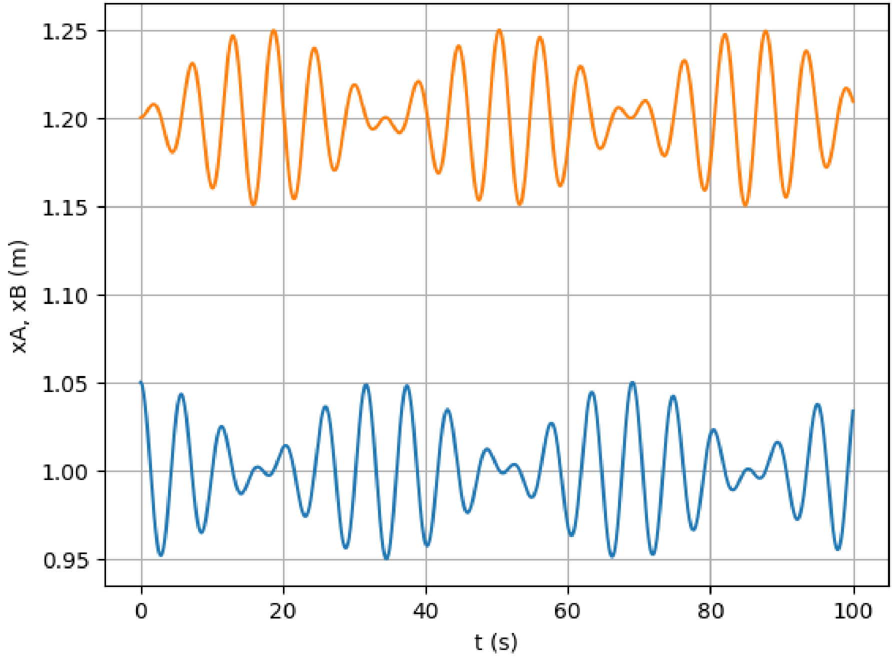


Parece uma oscilação rápida dentro de uma oscilação lenta

Acoplamento Fraco

$$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ {\color{red}k' = 0.2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1\mathrm{rad/s} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = 1.18\mathrm{rad/s}$$



Podemos escrever a solução analítica como um produto de cossenos

$$\begin{aligned} x_A &= x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t) + A_1\cos(\omega_2 t) \\ &= x_{eqA} + 2A_1\cos(\omega_{rap.}t)\cos(\omega_{lent.}t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_B &= x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ &= x_{eqA} + 2A_1\sin(\omega_{rap.}t)\sin(\omega_{lent.}t) \end{aligned}$$

$$\omega_{rap.} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} = 1.09\mathrm{rad/s} \quad \text{e} \quad \omega_{lent.} = \frac{\omega_2-\omega_1}{2} = 0.09\mathrm{rad/s}$$

Este fenómeno chama se

BATIMENTO

Note a energia transfere de um oscilador ao outro alternadamente

Osciladores Acoplados e <u>Amortecidos</u>

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right) - bv_{Ax}$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right) - bv_{Bx}$

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1\ \mathrm{kg}$

$\boldsymbol{b = 0.05}$

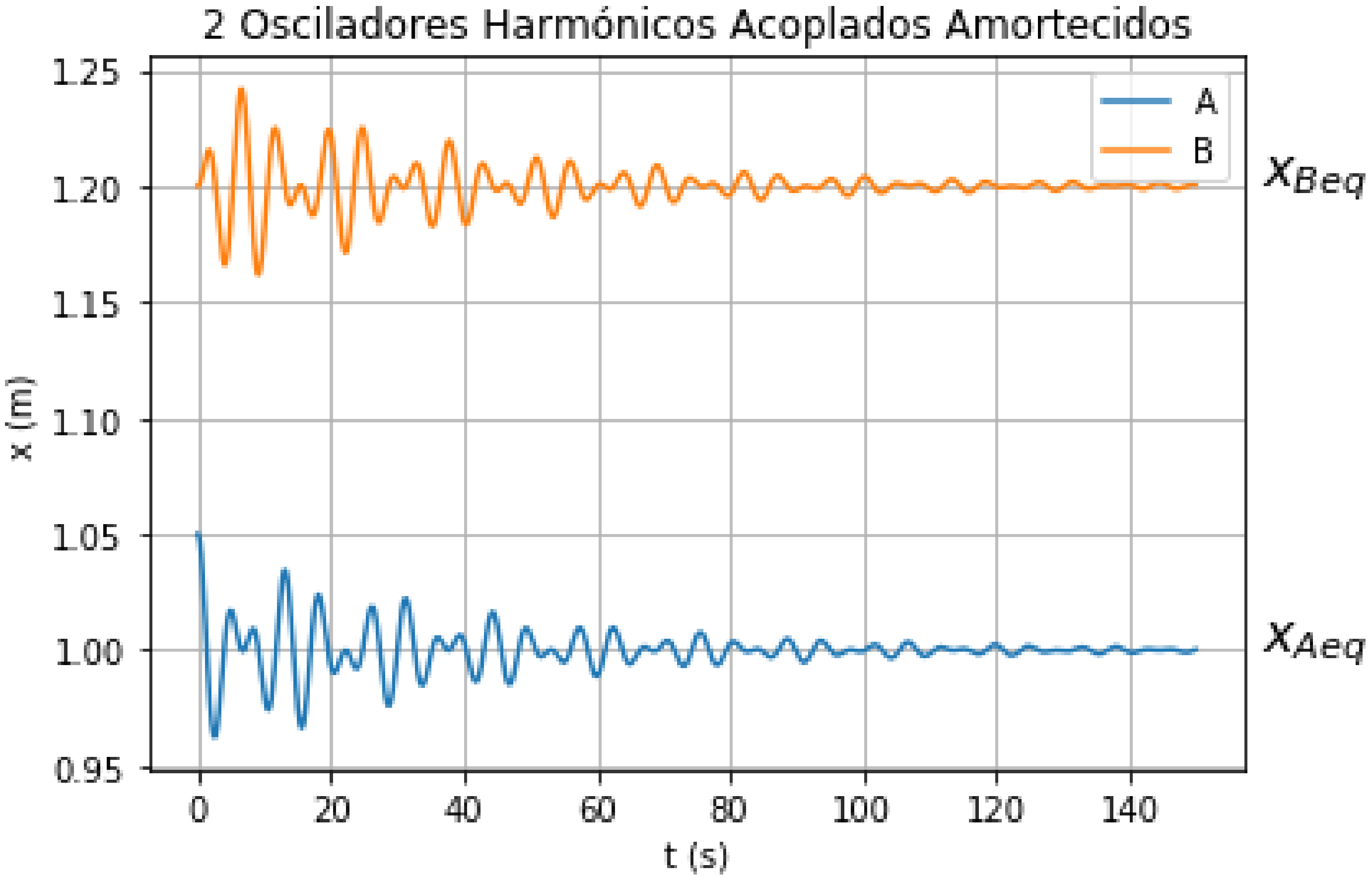
$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\quad x_{Aeq} = 1.2\ \mathrm{m}$

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\ \mathrm{m}$

$x_{B0} = x_{Beq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Ambos os osciladores tendem para a sua posição de equilíbrio



Osciladores Acoplados Amortecidos e <u>Forçado no corpo A</u>

Corpo A $\quad m\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right) - bv_{Ax} + F_0\cos(\omega_f t)$

Corpo B $\quad m\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right) - bv_{Bx}$

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg

$b = 0.05$ kg/s

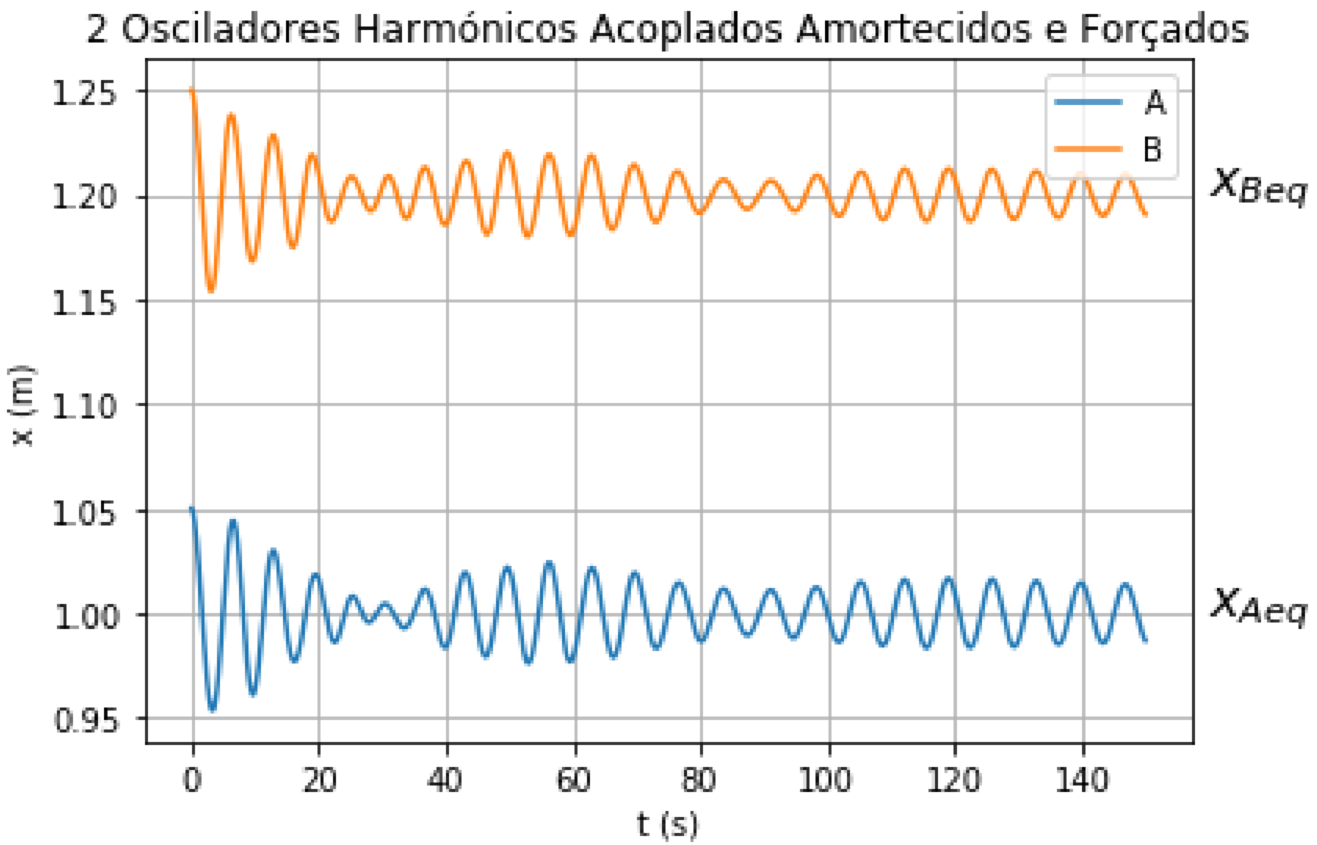
$\boldsymbol{F_0 = 0.005\,N\,;\ \omega_f = 1}$ **rad/s**

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\ x_{Beq} = 1.2$ m

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

$x_{B0} = x_{Beq} + 0.05$ m

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$



Cada oscilador tende para um regime estacionário

Harmónico simples (?)

Podemos calcular **a amplitude** e a **frequência**

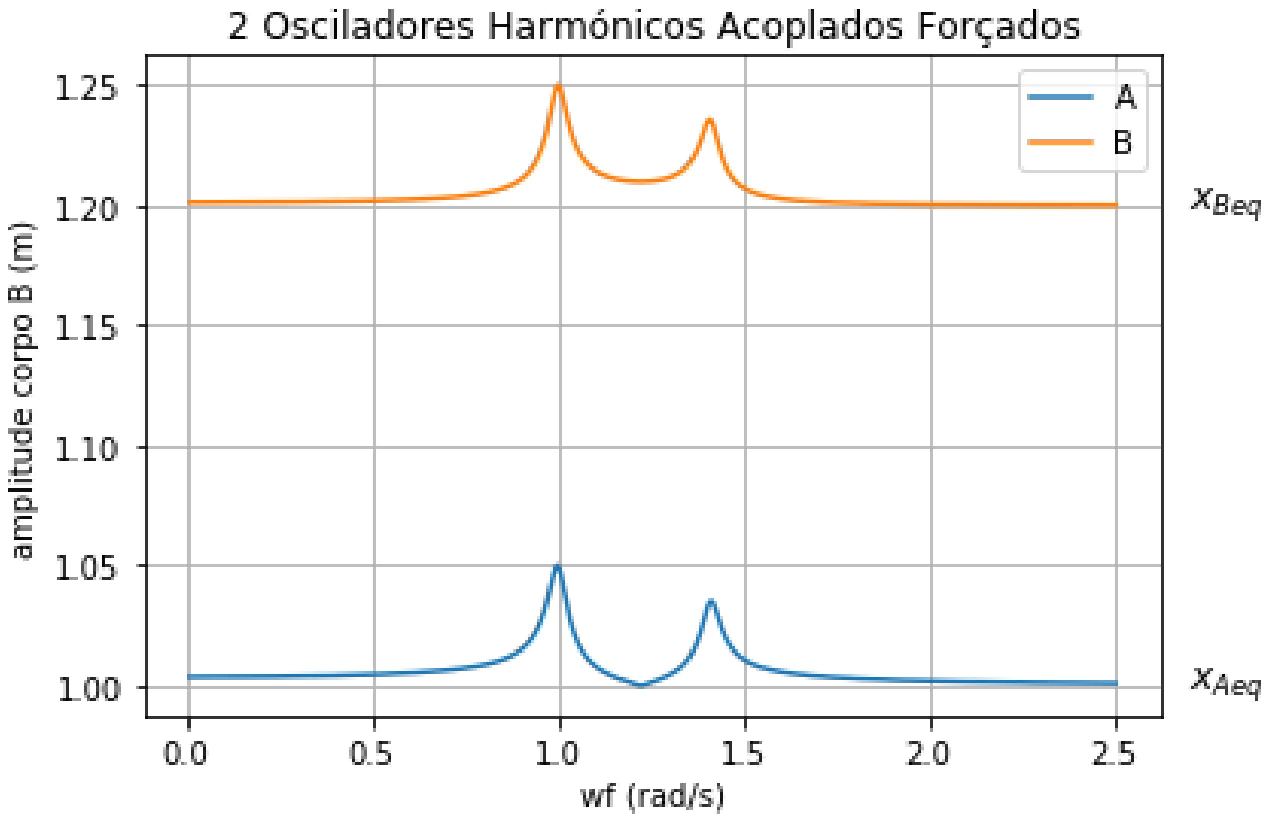
Osciladores Acoplados Amortecidos e Forçado no corpo A

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right) - bv_{Ax} + F_0\cos(\omega_f t)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right) - bv_{Bx}$

Ressonância nos dois corpos na **frequência dos modos normais** (como no caso de um oscilador)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s} \;\text{ e }\; \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k\prime}{m}} = 1.414 \text{ rad/s}$$



Série de Fourier
Analise de frequências

Joseph Fourier 1768-1830

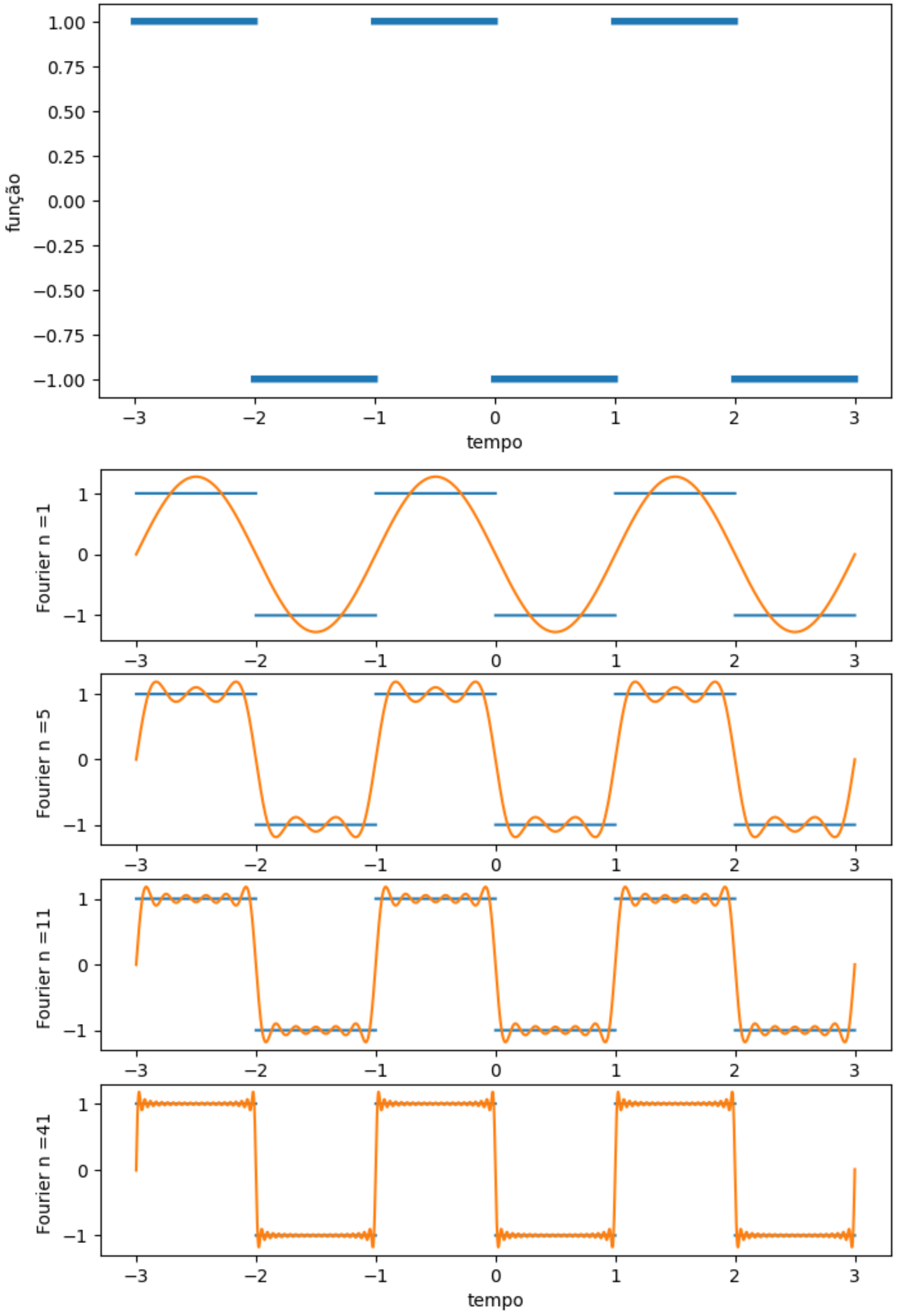
A série de Fourier decompõe uma função periódica *f(t),* de período T ou frequência angular $\omega = 2\pi/T$,
numa soma de funções sinusoidais de frequência angular múltipla de ω ($\omega_n = n\omega$)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t\}$$

Os coeficientes de Fourier são expressos por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Série de Fourier

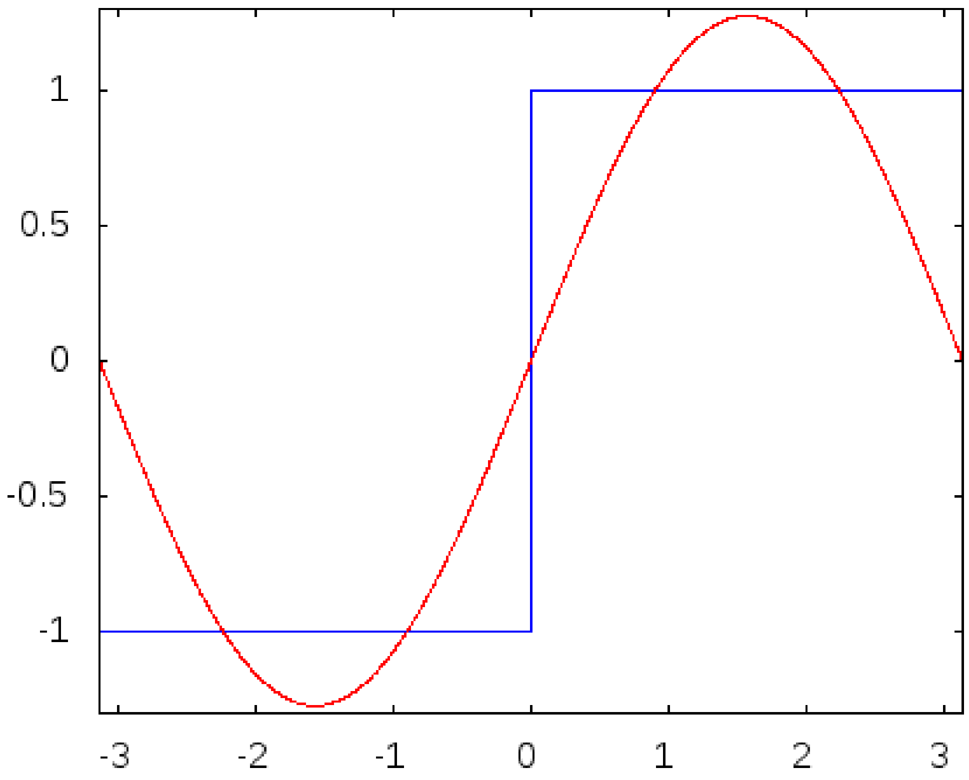


Ex.: Onda quadrada

Os coeficientes *a* e *b* são

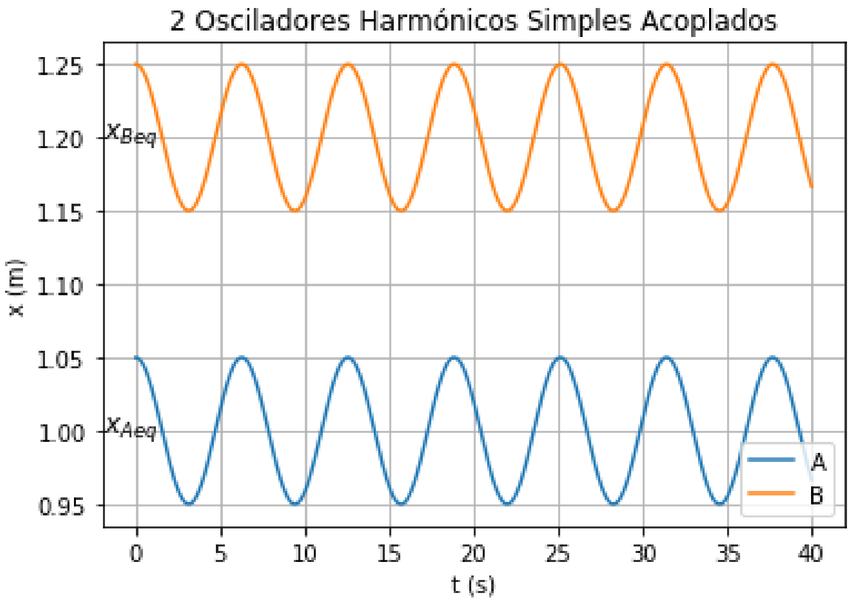
$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2[(-1)^n - 1]}{n\pi} \end{cases}$$

$$n = 0,1,2,3,\ldots$$



Série de Fourier **Ex.: 2 Osciladores Acoplados**

Modo normal 1 $\omega_1 = 1$ rad/s



Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\,dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\omega_n = n\omega = n\frac{2\pi}{T}$$

Mas a função está expressa por pontos!

$\Rightarrow$ **Integração numérica usando a aproximação trapezoidal**

Cálculo numérico dos coeficientes de Fourier

Calcula os integrais

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\,dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

pela aproximação trapezoidal.

Input:

dados numéricos **tp** e **xp**
(valores de x em momentos t)

it0 e **it1**
indices de tempo do inicio e do fim do período de analizar:

T = tp[it1]-tp[it0]

nf
número do coeficiente a calcular

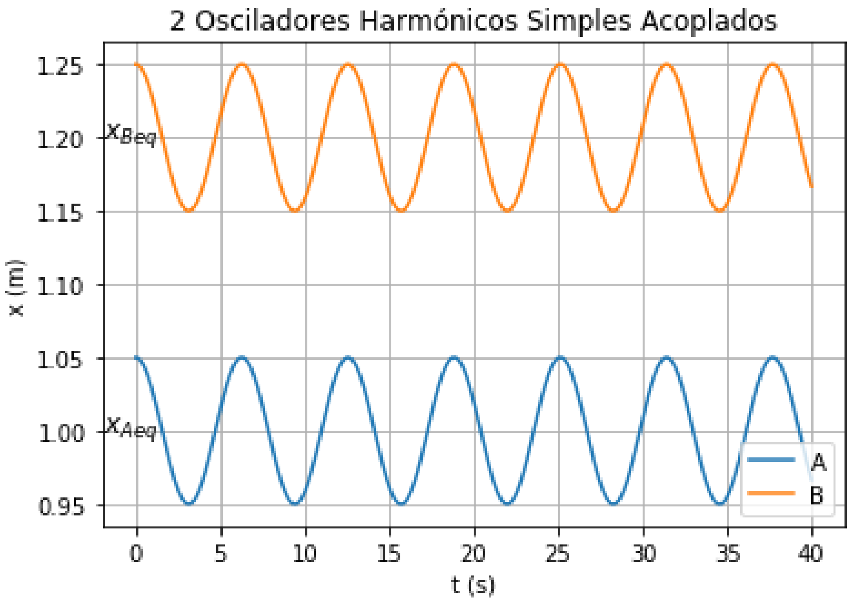
$$\omega_n = n\omega$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

```
def abfourier(tp,xp,it0,it1,nf):
# cálculo dos coeficientes de Fourier a_nf e b_nf
#      a_nf = 2/T integral ( xp cos( nf w) ) dt   entre tp(it0) e tp(it1)
#      b_nf = 2/T integral ( xp sin( nf w) ) dt   entre tp(it0) e tp(it1)
# integracao numerica pela aproximação trapezoidal
# input: matrizes tempo tp   (abcissas)
#              posição xp (ordenadas)
#      indices inicial it0
#            final   it1  (ao fim de um período)
#      nf índice de Fourier
# output: af_bf e bf_nf
    dt=tp[1]-tp[0]
    per=tp[it1]-tp[it0]
    ome=2*np.pi/per

    s1=xp[it0]*np.cos(nf*ome*tp[it0])
    s2=xp[it1]*np.cos(nf*ome*tp[it1])
    st=xp[it0+1:it1]*np.cos(nf*ome*tp[it0+1:it1])
    soma=np.sum(st)

    q1=xp[it0]*np.sin(nf*ome*tp[it0])
    q2=xp[it1]*np.sin(nf*ome*tp[it1])
    qt=xp[it0+1:it1]*np.sin(nf*ome*tp[it0+1:it1])
    somq=np.sum(qt)

    intega=((s1+s2)/2+soma)*dt
    af=2/per*intega
    integq=((q1+q2)/2+somq)*dt
    bf=2/per*integq
    return af,bf
```

Série de Fourier **Ex.: 2 Osciladores Acoplados**

<u>Modo normal 1</u> $\omega_1 = 1$ rad/s



$$T = 100\, s$$

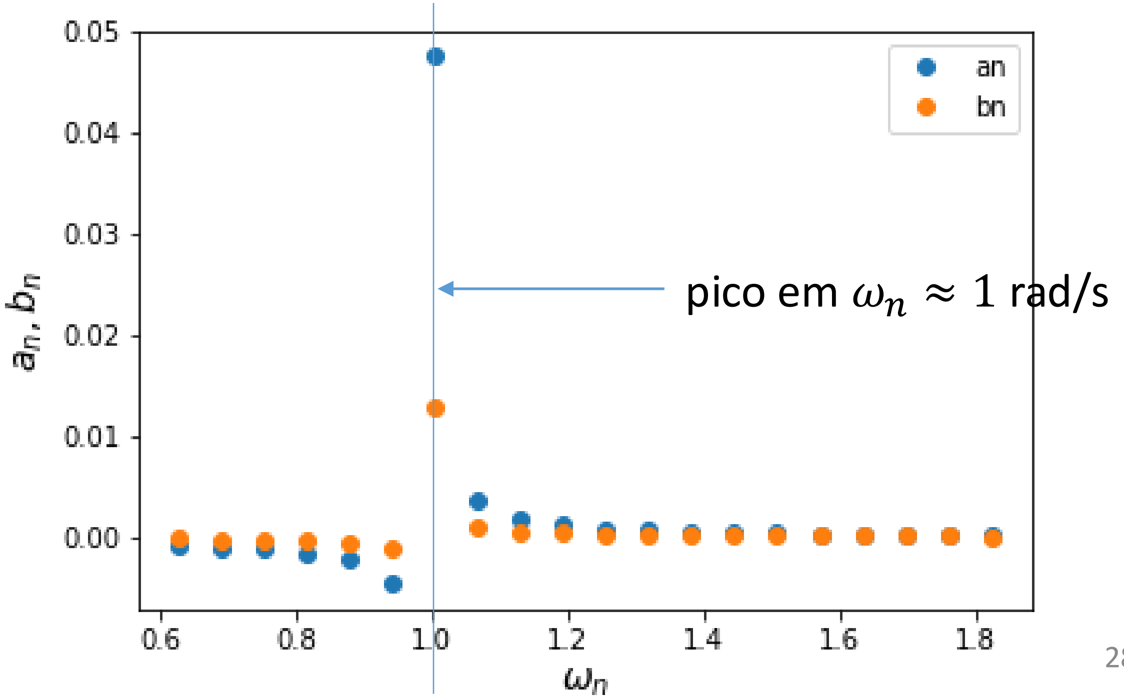
$$\omega_n = n\omega = n\frac{2\pi}{T}$$

Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\; dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

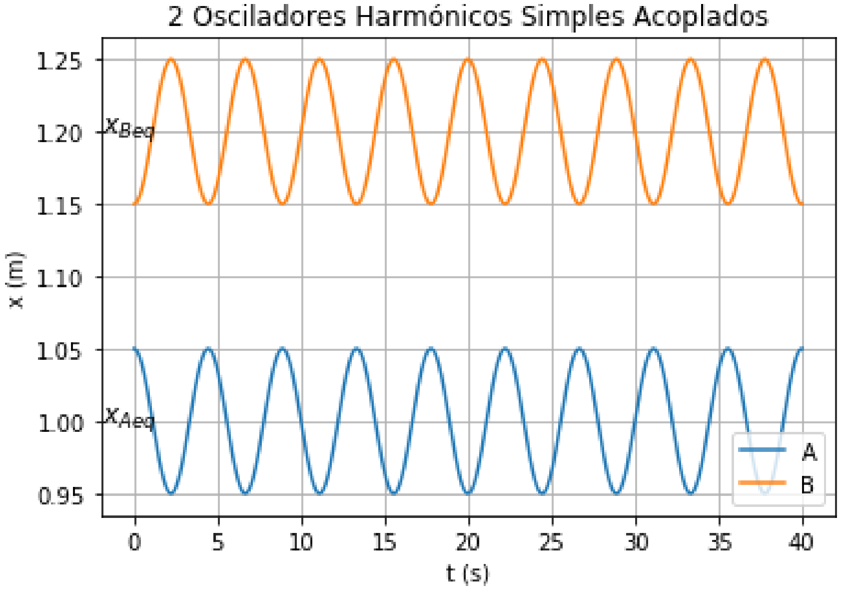
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\; dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Cálculo numérico dos coeficientes:



Série de Fourier **Ex.: 2 Osciladores Acoplados**

<u>Modo normal 2</u> $\omega_2 = 1.414$ rad/s



$$T = 100\ s$$

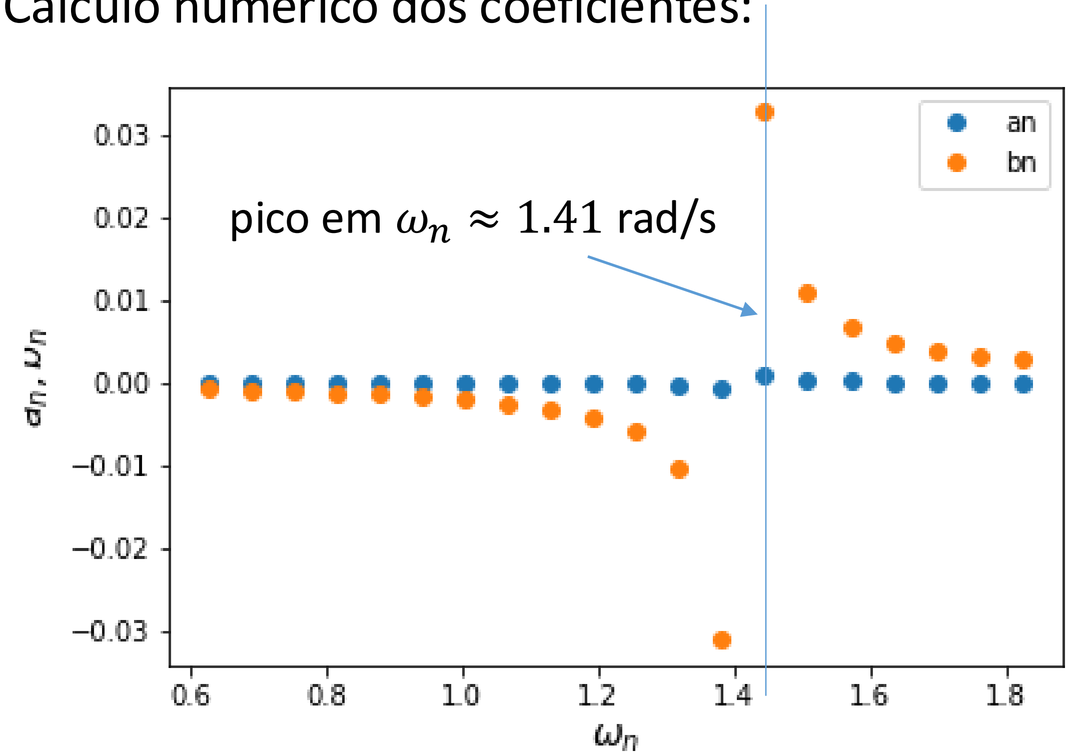
$$\omega_n = n\omega = n\frac{2\pi}{T}$$

Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\ dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\ dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

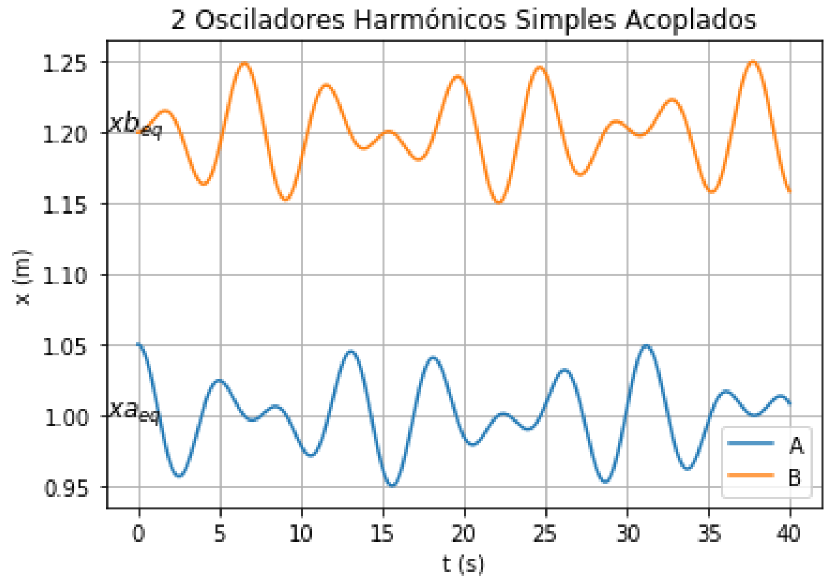
Cálculo numérico dos coeficientes:



Série de Fourier

Ex.: 2 Osciladores Acoplados

Condições iniciais gerais



$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m
$x_{B0} = x_{Beq}$

picos em $\omega_n \approx 1$ rad/s
e $\omega_n \approx 1.41$ rad/s

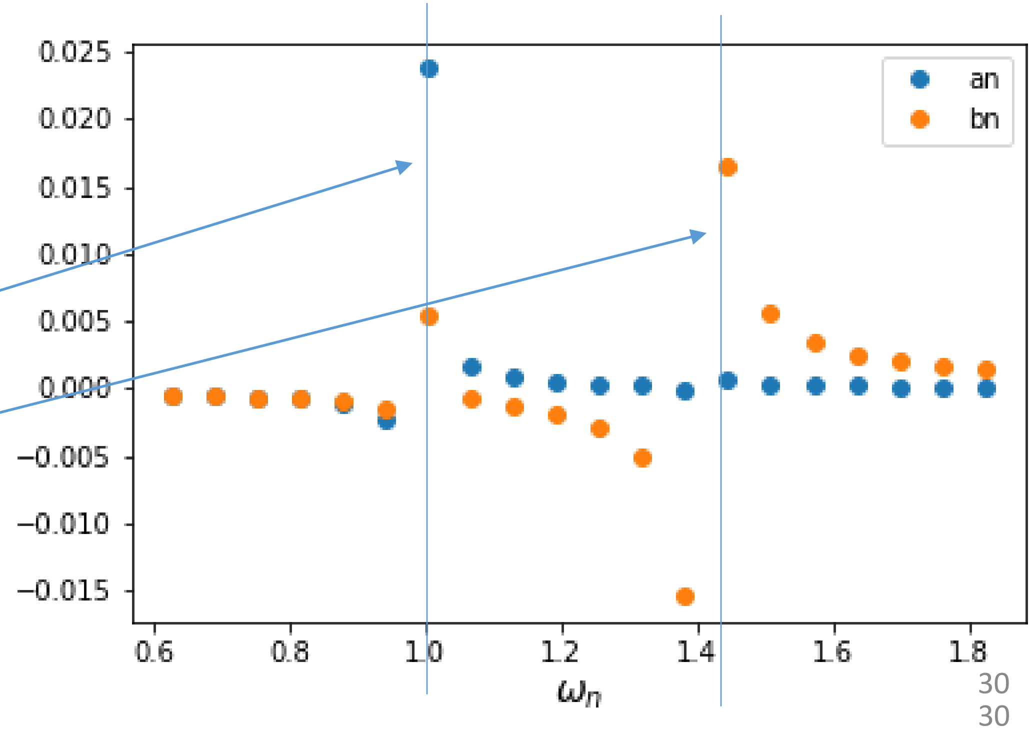
Confirma que é uma sobreposição dos 2 modos normais

Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\,dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

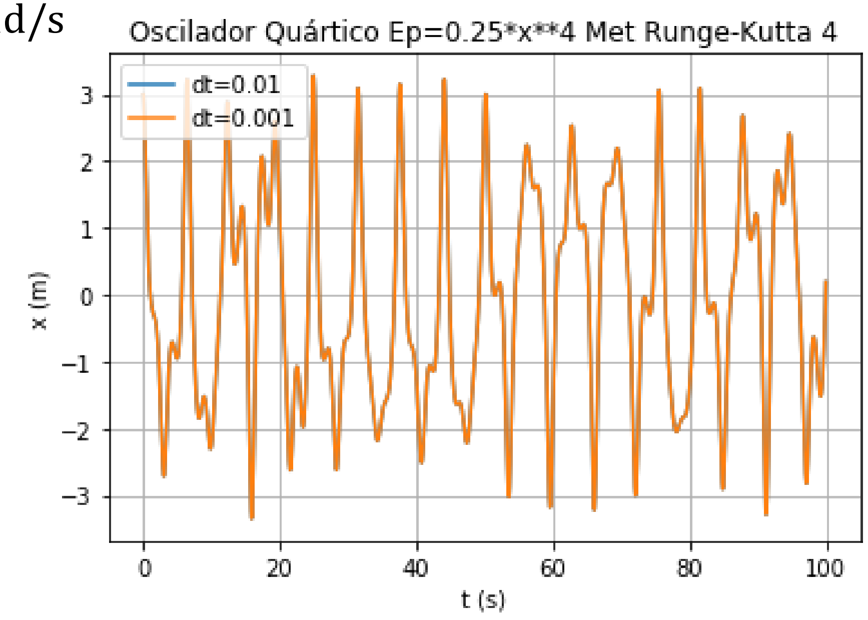
Cálculo numérico dos coeficientes:



30

Ex.: Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado

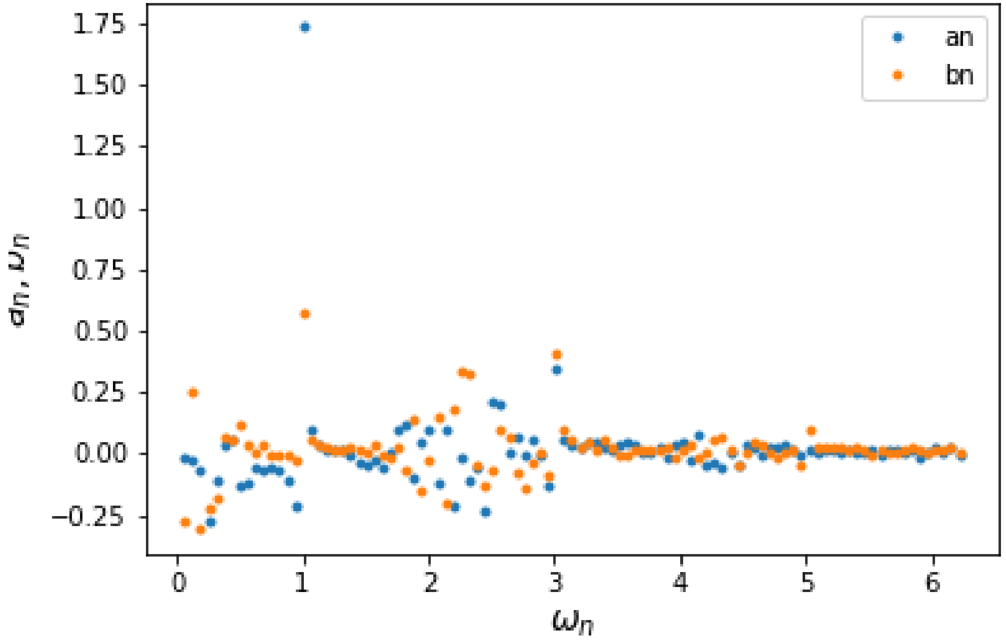
$E_p = \alpha x^4$
$x(t=0) = 3.0000$ m
$v_x(t=0) = 0$
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 0.05$ kg/s
$\alpha = 0.25$ m^{-2}
$F_0 = 7.5\ N$
$\omega_f = 1$ rad/s



Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\, dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\, dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Cálculo numérico dos coeficientes:



Não tem frequência carateristica

Problema: 2 osciladores acoplados

Num sistema de 2 corpos, *A* e *B*, ligados entre duas paredes por três molas, de constantes elástica *k*, *k'* e *k*, a solução geral do movimento é dado por

$$x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

em que x_{Aeq} e x_{Beq} são as posições de equilíbrio dos corpos A e B, respetivamente, e em que

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$$

Encontre os valores de A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 , sabendo que no instante inicial

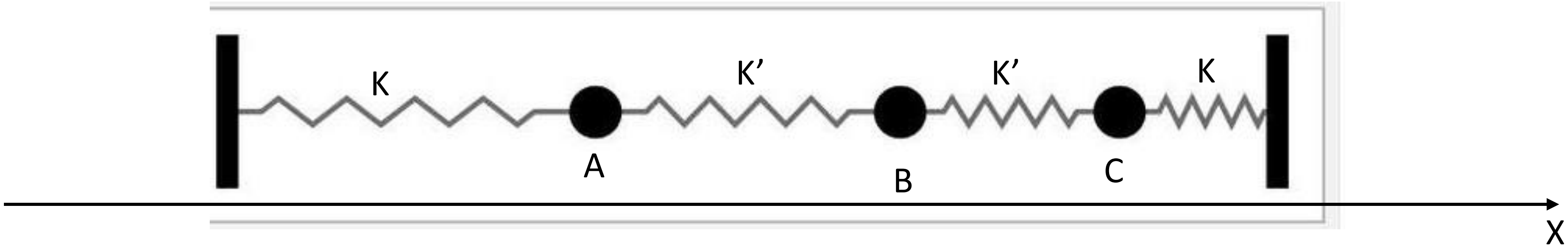
$$x_{A0} = x_{Aeq},$$
$$x_{B0} = x_{Beq},$$
$$v_{A0} = 1\mathrm{m/s}$$
$$v_{B0} = -1\mathrm{m/s}$$

Dados: $k = 2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $k' = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $m = 1$ kg, $x_{Aeq} = 1.0$ m e $x_{Beq} = 1.2$ m

R: $A_1 = 0, A_2 = \frac{1}{2}$ e $\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$

ou $A_1 = 0, A_2 = -\frac{1}{2}$ e $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ (ϕ_1 qualquar).

3 Osciladors Harmónicos Acoplados



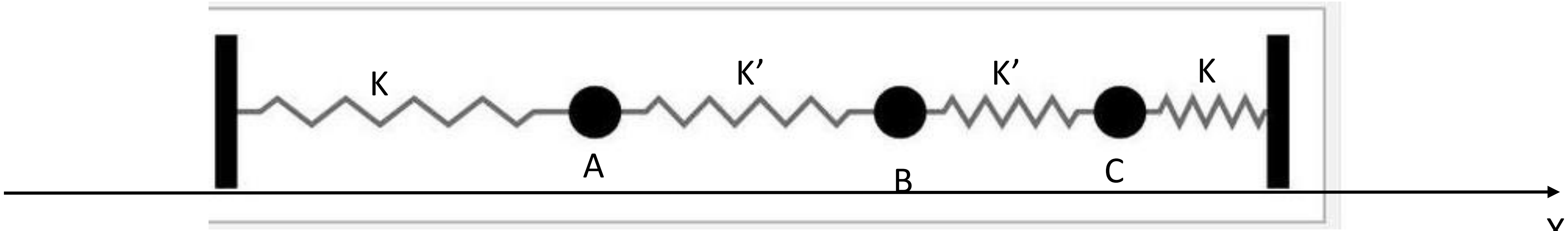
Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

1. Que forças estão aplicadas a cada corpo?

2. Equação do movimento

3. Solução Numérica

3 Osciladors Harmónicos Acoplados



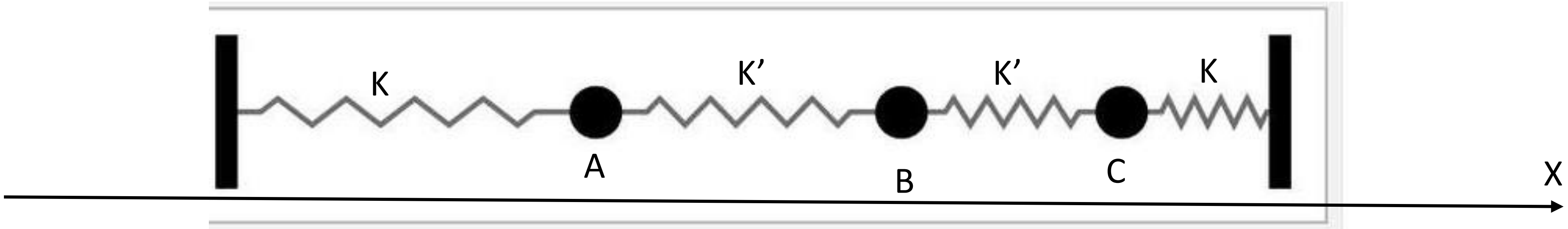
Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

<u>Força aplicada ao corpo B:</u>

$$F_{Bx} = -k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right] - k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_C - x_{Ceq}\right)\right]$$

e semelhante para corpos A e C

3 Osciladores Harmónicos Acoplados



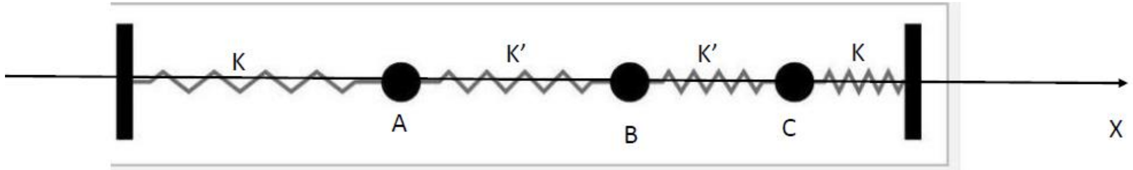
Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

<u>Equação dinâmica de Newton para cada corpo</u>

Corpo A $m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$

Corpo B $m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})]$

Corpo C $m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})]$



Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})]$

Corpo C $\quad m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})]$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

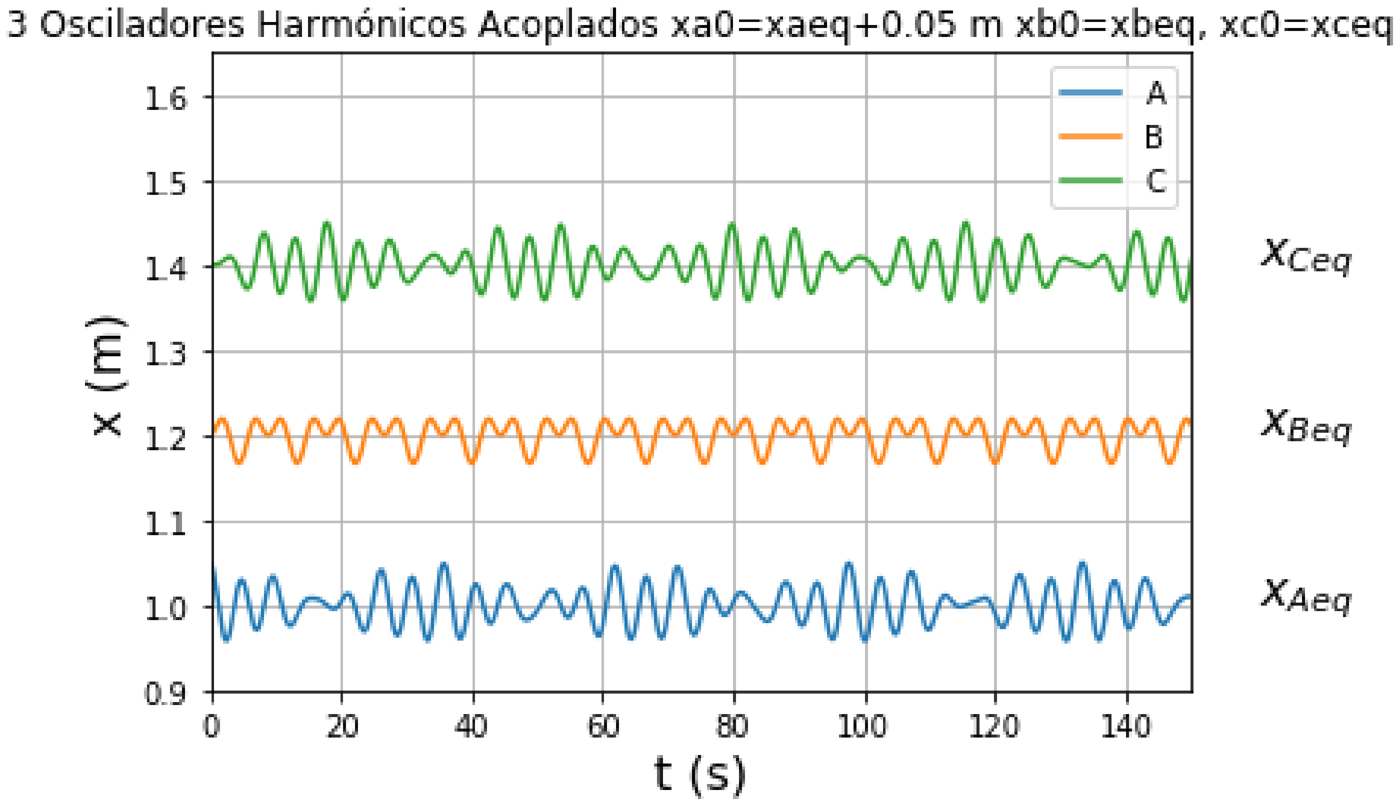
$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1\ \mathrm{kg}$

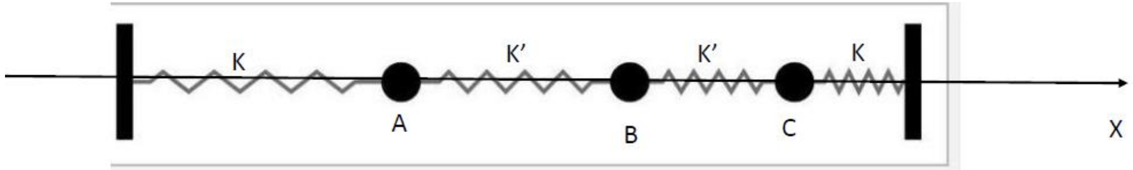
$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\ \ x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}\quad x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\ \mathrm{m}$

$x_{B0} = x_{Beq}\qquad x_{C0} = x_{Ceq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$





Corpo A $m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq})\; - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\,]$

Corpo B $m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})]$

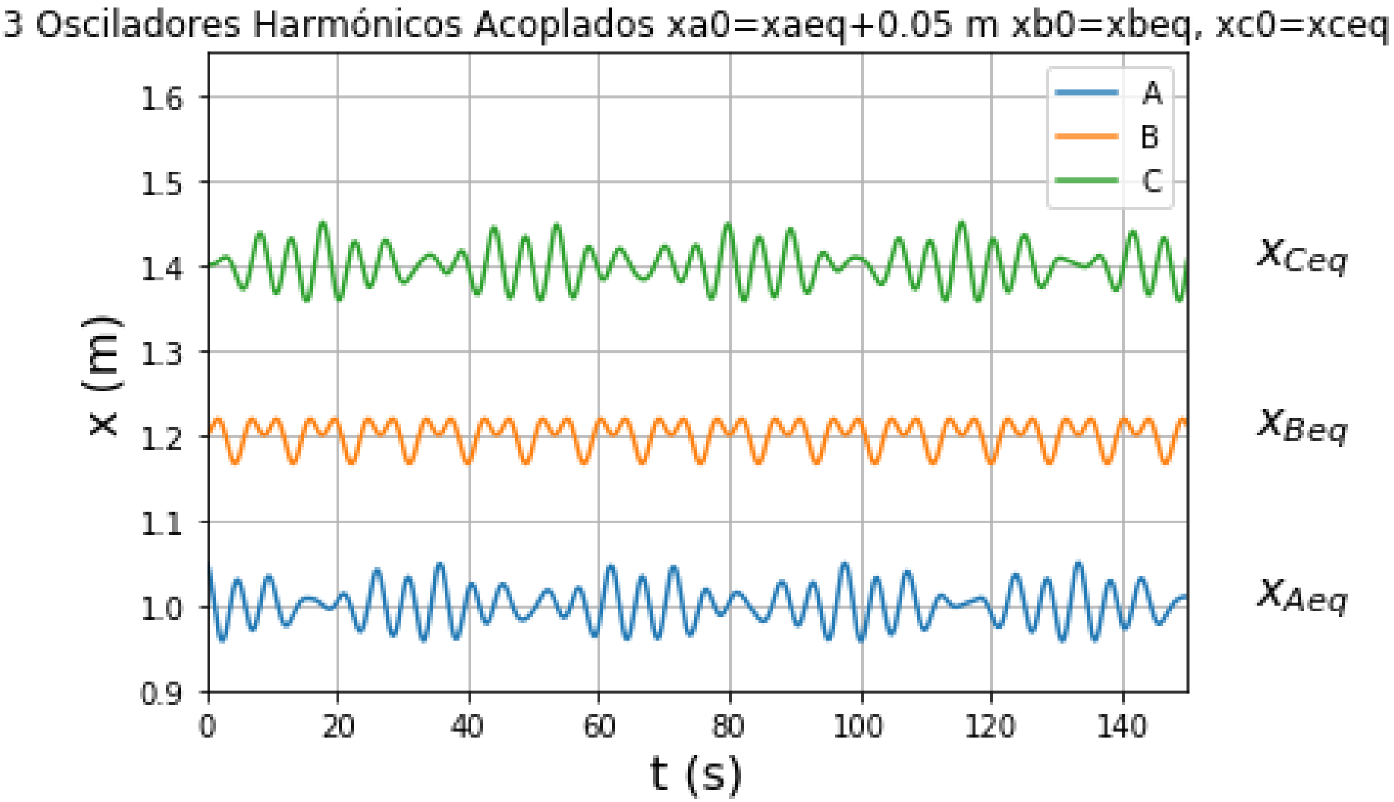
Corpo C $m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})]$

Movimento de cada corpo parece periódico

É uma sobreposição de modos normais?

ou seja

Estas equações admitem soluções sinusoidais?



Modos Normais

3 Osciladores Harmónicos Acoplados :

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left[\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right]$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right] - k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_C - x_{Ceq}\right)\right]$

Corpo C $\quad m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\left(x_C - x_{Ceq}\right) - k'\left[\left(x_C - x_{Ceq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right]$

Estas equações admitem soluções sinusoidais para cada corpo?

Já vimos por tentativa e erro os 2 modos normais no caso de 2 osciladores harmónicos

= soluções sinusoidais

Vamos procurar um método geral para encontrar os modos normais

Modos Normais

3 Osciladors Harmónicos Acoplados :

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left[\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right]$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right] - k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_C - x_{Ceq}\right)\right]$

Corpo C $\quad m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\left(x_C - x_{Ceq}\right) - k'\left[\left(x_C - x_{Ceq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right]$

Transformação das variáveis x para o desvio u à posição de equilíbrio x_{eq}

$$\begin{aligned} x_A - x_{Aeq} &= u_A \\ x_B - x_{Beq} &= u_B \\ x_C - x_{Ceq} &= u_C \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} m\,\dfrac{d^2u_A}{dt^2} = -k\,u_A - k'(u_A - u_B) \\ m\,\dfrac{d^2u_B}{dt^2} = -k'(u_B - u_A) - k'(u_B - u_C) \\ m\,\dfrac{d^2u_{CA}}{dt^2} = -k\,u_C - k'(u_C - u_B) \end{cases}$$

Modos Normais

$$\begin{cases} m\ \frac{d^2u_A}{dt^2} = -k\ u_A\ - k'(u_A - u_B) \\ m\ \frac{d^2u_B}{dt^2} = -k'(u_B - u_A) - k'(u_B - u_C) \\ m\ \frac{d^2u_{CA}}{dt^2} = \ -k\ u_C - k'(u_C - u_B) \end{cases}$$

Suponha-se que $u_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$ Então $\frac{d^2}{dt^2} u_i = \ -\omega^2\ u_i$

Substituir nas equações:

$$\begin{cases} \frac{k+k'}{m}\ u_A - \frac{k'}{m} u_B = \omega^2\ u_A \\ -\frac{k'}{m} u_A\ + \frac{2k'}{m} u_B - \frac{k'}{m} u_C = \omega^2\ u_B \\ -\frac{k'}{m} u_B\ + \frac{k+k'}{m} u_C = \omega^2\ u_C \end{cases}$$

Sistema homogéneo de 3 equações a 3 incógnitas

Modos Normais

Suponha-se que $u_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$

Sistema homogéneo de 3 equações a 3 incógnitas

$$\begin{cases} \frac{k+k'}{m}\, u_A - \frac{k'}{m} u_B = \omega^2\, u_A \\ -\frac{k'}{m} u_A + \frac{2k'}{m}\, u_B - \frac{k'}{m} u_C = \omega^2\, u_B \\ -\frac{k'}{m} u_B + \frac{k+k'}{m}\, u_C = \omega^2\, u_C \end{cases}$$

Pode ser escrito com matrizes:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}$$

Problema de valores e vetores próprios

Matriz x vetor = constante x vetor

Valores próprios correspondem às frequências dos modos normais: ω_i^2
Vetores próprios indiquem o padrão do movimento em cada modo

Modos Normais

Problema

a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{k+k'}{m}\right) & -\dfrac{k'}{m} & 0 \\ -\dfrac{k'}{m} & \left(\dfrac{2k'}{m}\right) & -\dfrac{k'}{m} \\ 0 & -\dfrac{k'}{m} & \left(\dfrac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

em que $k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$

b) Calcule as frequências de vibração (= raiz quadrada do valor próprio)

c) Verifique que os vetores próprios são ortogonais (produto escalar nulo).

<u>Python:</u>

```
import numpy as np
w, v = np.linalg.eig(matdyn)  # eig: function para calcular valores e vetores próprios
                              #    de uma matriz simétrica
                              # w: valores próprios
                              # v: vetores próprios
```

Modos Normais

Problema:

a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

em que $k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $m = 1$ kg

b) Calcule as frequências de vibração (= raiz quadrada do valor próprio)

<u>Solução:</u>

```
import numpy as np
k = 1
k1 = 0.5
m = 1

# matriz da dynamica
a = (k+k1)/m
b = k1/m
matdyn = ((a,-b,0),(-b,2*b,-b),(0,-b,a))

# encontrar valores e vetores próprios
l,v = np.linalg.eig(matdyn)

# frequências são raizes quadrados dos valores próprios
print(np.round(np.sqrt(l),4))
print(np.round(v,4))
```

Frequências

[0.7071 1.2247 1.4142]

Vetores próprios

[[0.4082 -0.7071 0.5774]
[0.8165 0. -0.5774]
[0.4082 0.7071 0.5774]]

vetores no vertical

Verificar modos normais

- Escolher condições iniciais de acordo com o vetor próprio
- Observar se há oscilações sinusoidais
- A frequência deve concordar com o valor próprio

Modo Normal Simétrico

frequência: 1.22474487

vetor próprio:

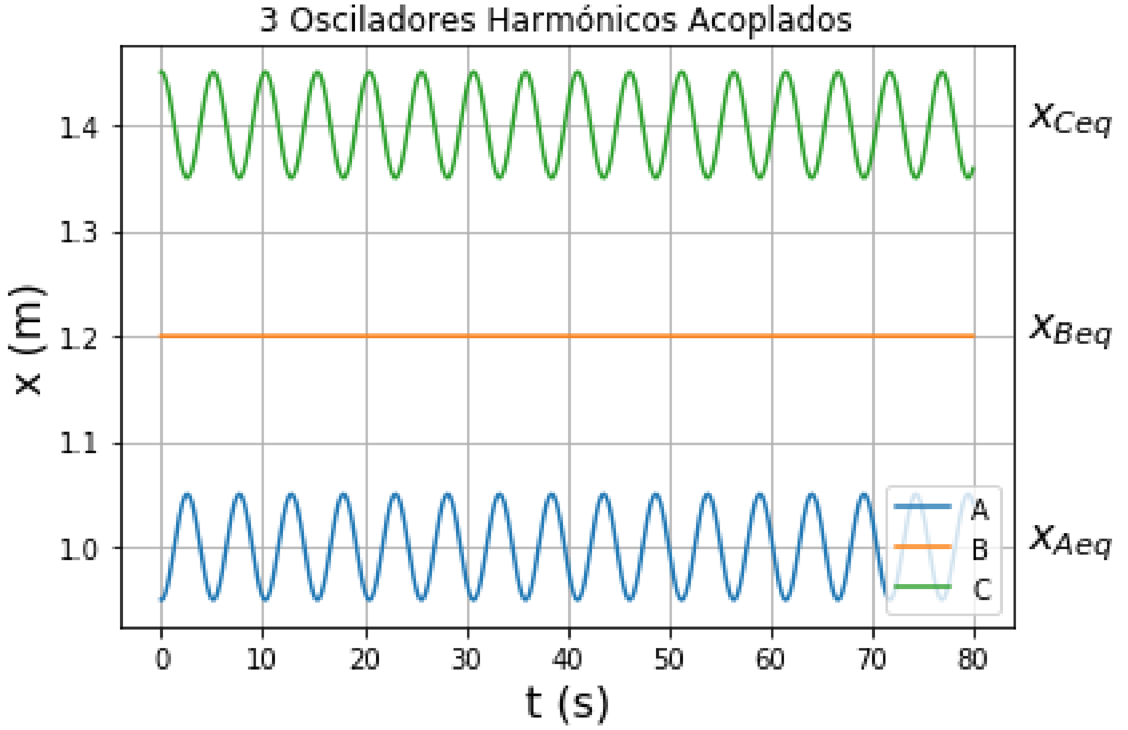
[-0.7071, *-u*
0.0000, *0*
0.7071] *u*

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$

$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\quad x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}\quad x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$

$$x_{A0} = x_{Aeq} - 0.05\ \mathrm{m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq}$$
$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.05\ \mathrm{m}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$



T=5.130 s e ω= 1.225 rad/s

(c) Longitudinal normal modes

Modo Normal Asimétrico

frequência: 1.41421356

vetor próprio:

[0.5774,	u
-0.5774,	$-u$
0.5774]	u

$$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$$

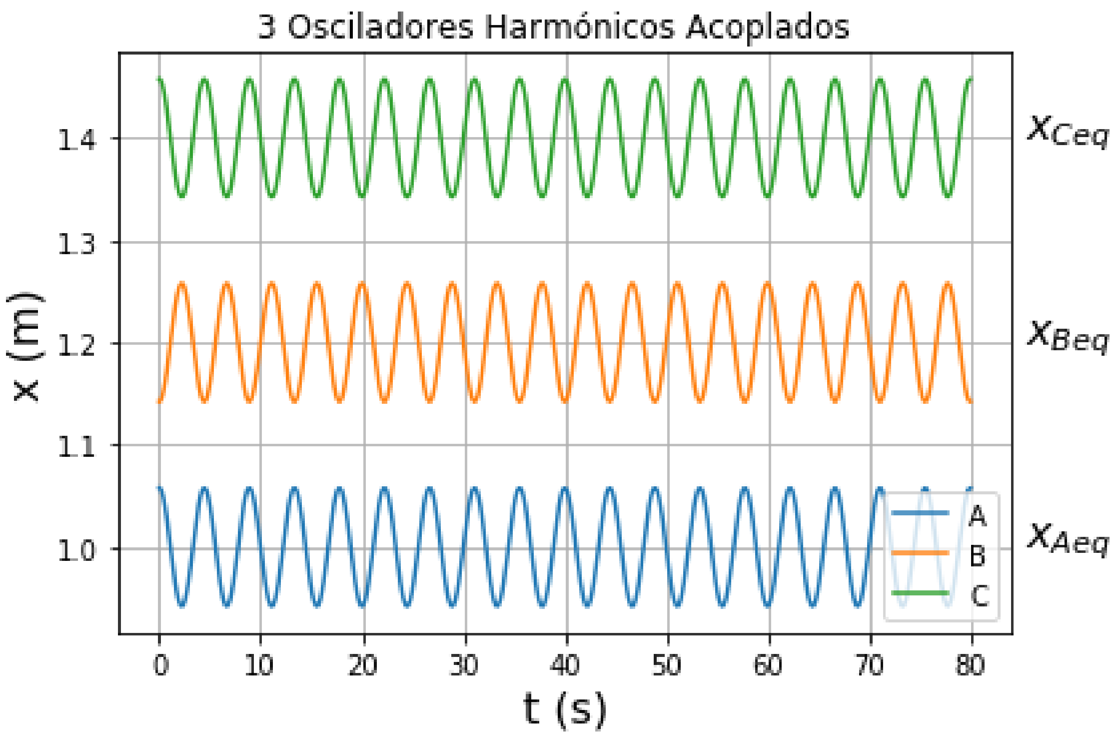
$$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\quad x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}\quad x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\ \mathrm{m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq} - 0.05\mathrm{m}$$

$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.05\mathrm{m}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$



T= 4.443 s e ω= 1.414 rad/s

Modo Normal 3

frequência: 0.70710678

vetor próprio:

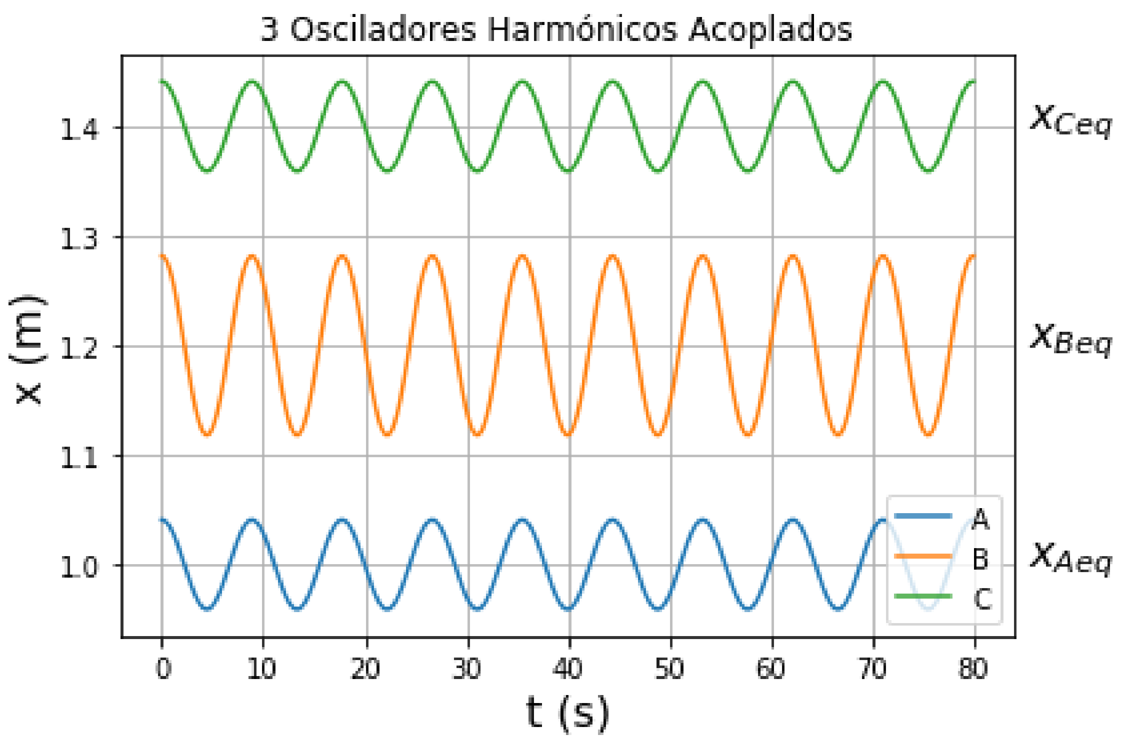
[0.4082,	u
0.8165,	$2u$
0.4082]	u

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$

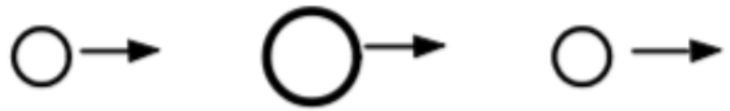
$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\quad x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}\quad x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.04\ \mathrm{m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq} + 0.08\ \mathrm{m}$$
$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.04\ \mathrm{m}$$

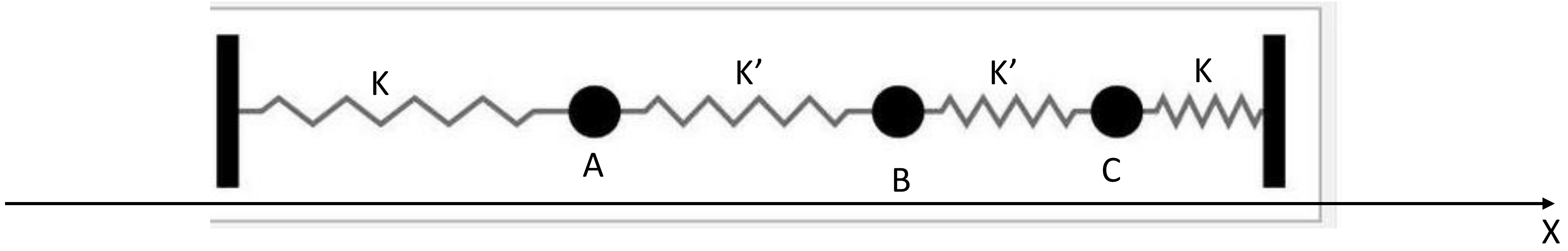
$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$



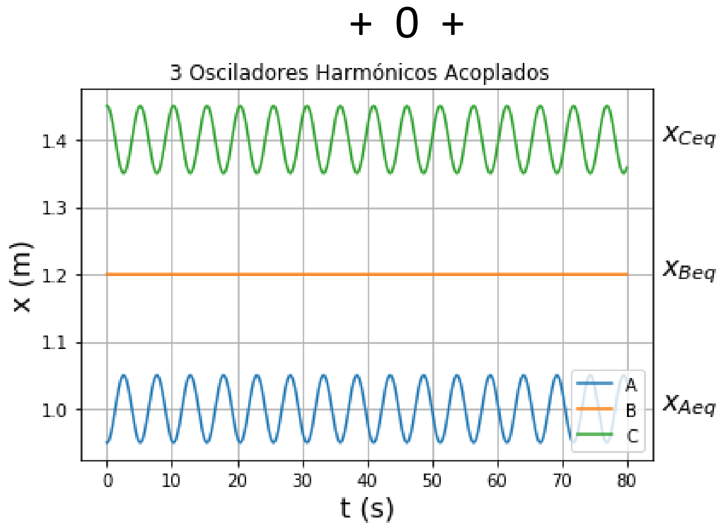
T= 8.886 s e ω= 0.707 rad/s

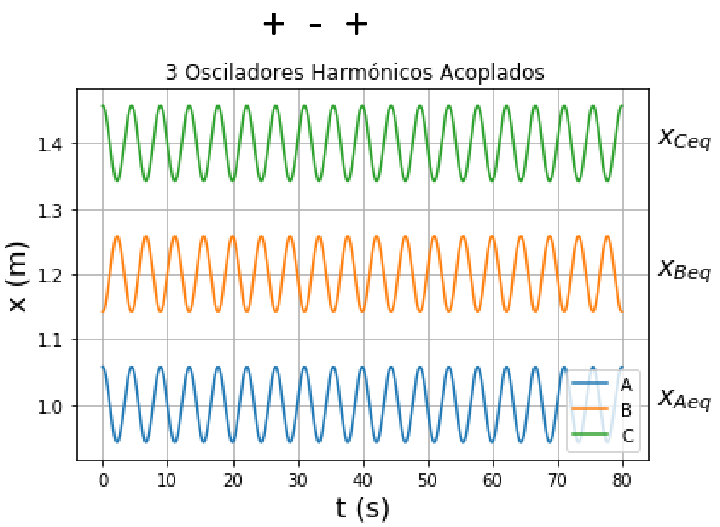


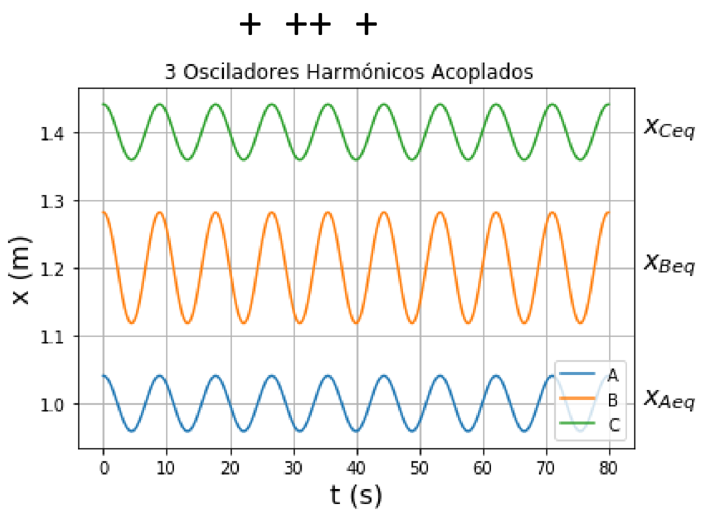
3 Osciladores Harmónicos Acoplados



3 modos normais:



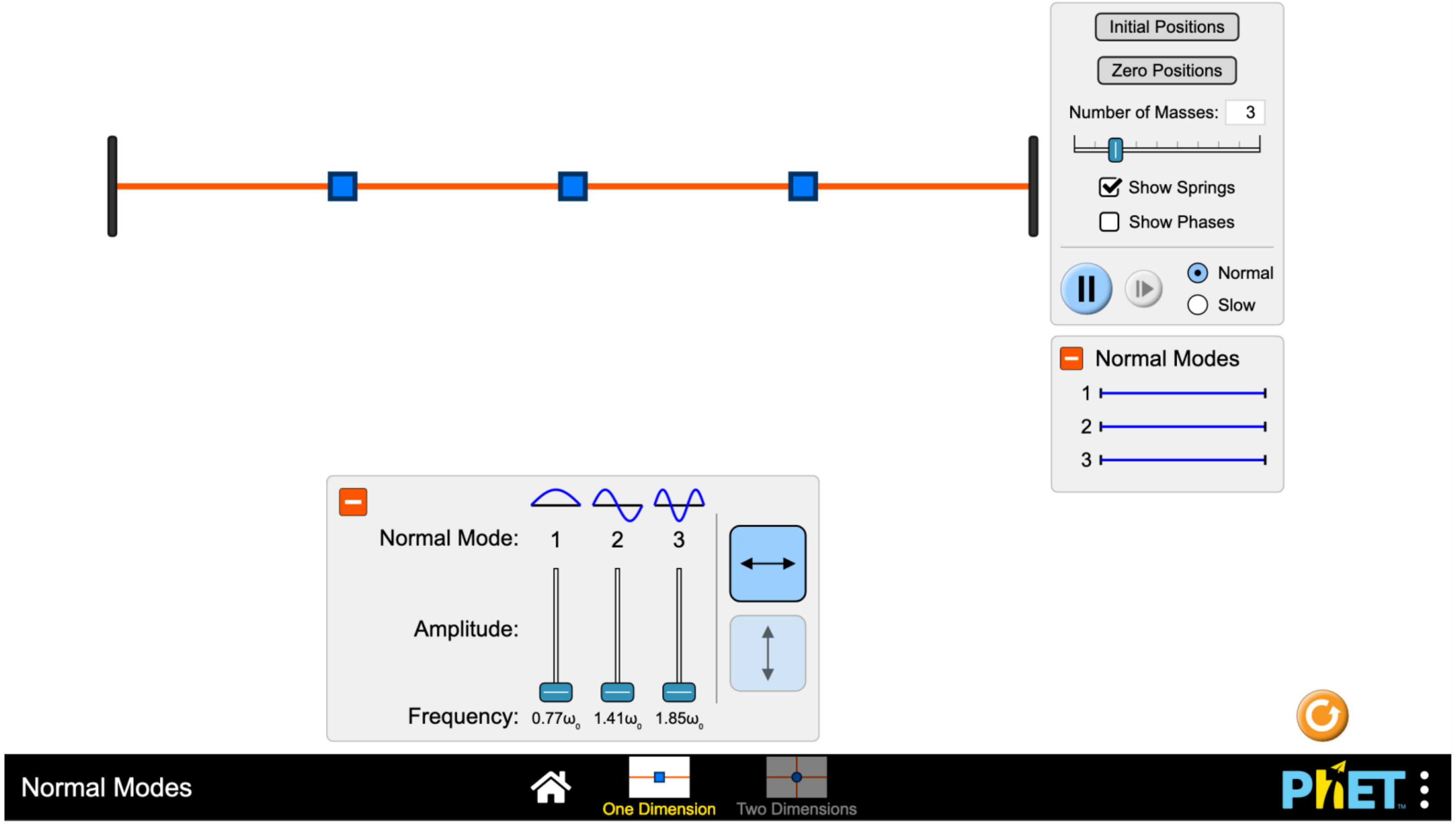




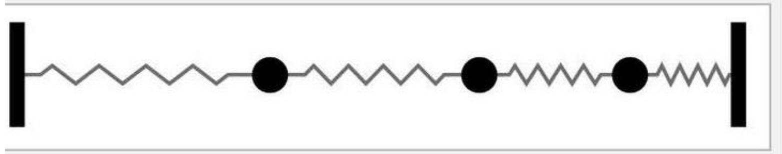
Qualquer movimento de 3 corpos acoplados por interação elástica é uma sobreposição dos 3 MODOS NORMAIS

3 Osciladors Harmónicos Acoplados

https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes_en.html



Amortecido



Corpo A $\quad m\,\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq})\, - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\,]\, -b\, v_{Ax}$

Corpo B $\quad m\,\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})]\, -b\, v_{Bx}$

Corpo C $\quad m\,\dfrac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})]\quad -b\, v_{Cx}$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1$ kg

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\;x_{Beq} = 1.2$ m $\quad x_{Ceq} = 1.4$ m

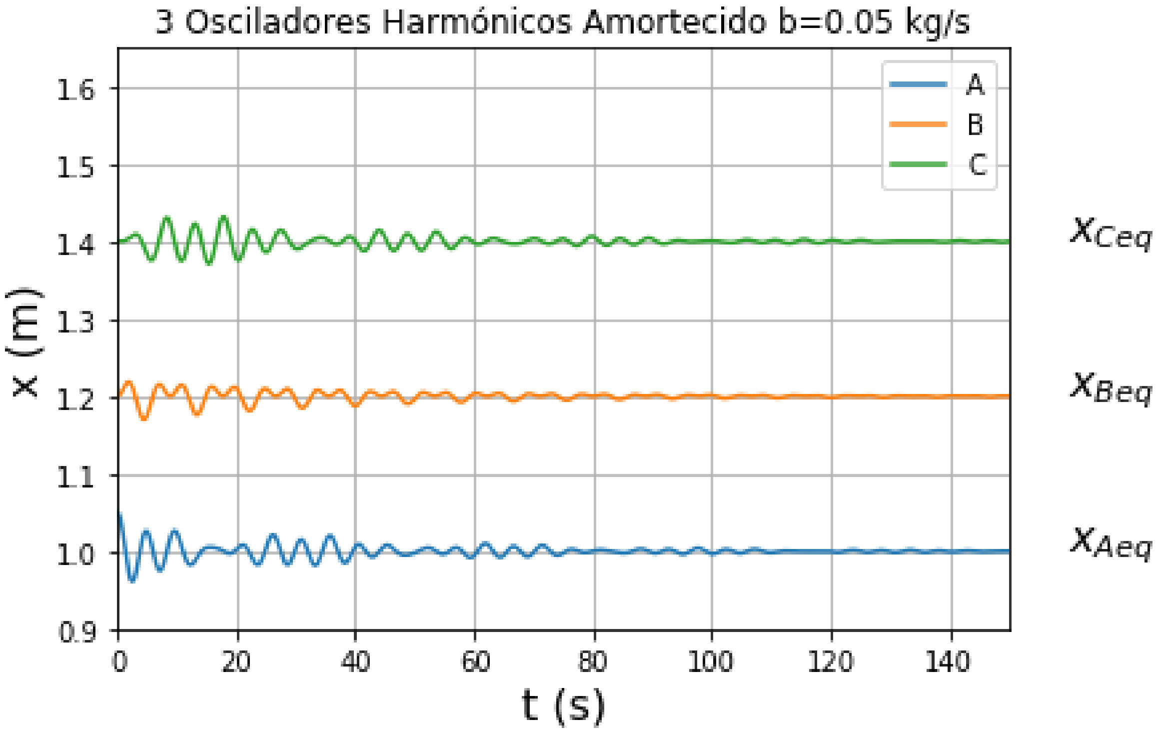
$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

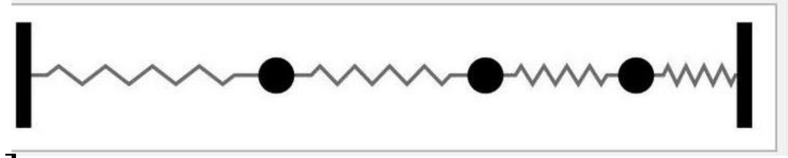
$$x_{C0} = x_{Ceq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$

Cada corpo tende para a posição de equilíbrio, à medida que o tempo aumenta.



Oscilador Harmónico Forçado



Corpo A $\quad m\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left[\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right] - b\, v_{Ax} + F_0 \cos(\omega_f t)$

Corpo B $\quad m\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right] - k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_C - x_{Ceq}\right)\right] - b\, v_{Bx}$

Corpo C $\quad m\dfrac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\left(x_C - x_{Ceq}\right) - k'\left[\left(x_C - x_{Ceq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right] \quad - b\, v_{Cx}$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $m = 1$ kg, $b = 0.05$ kg/s

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\;\; x_{Beq} = 1.2$ m $\;\;\; x_{Ceq} = 1.4$ m

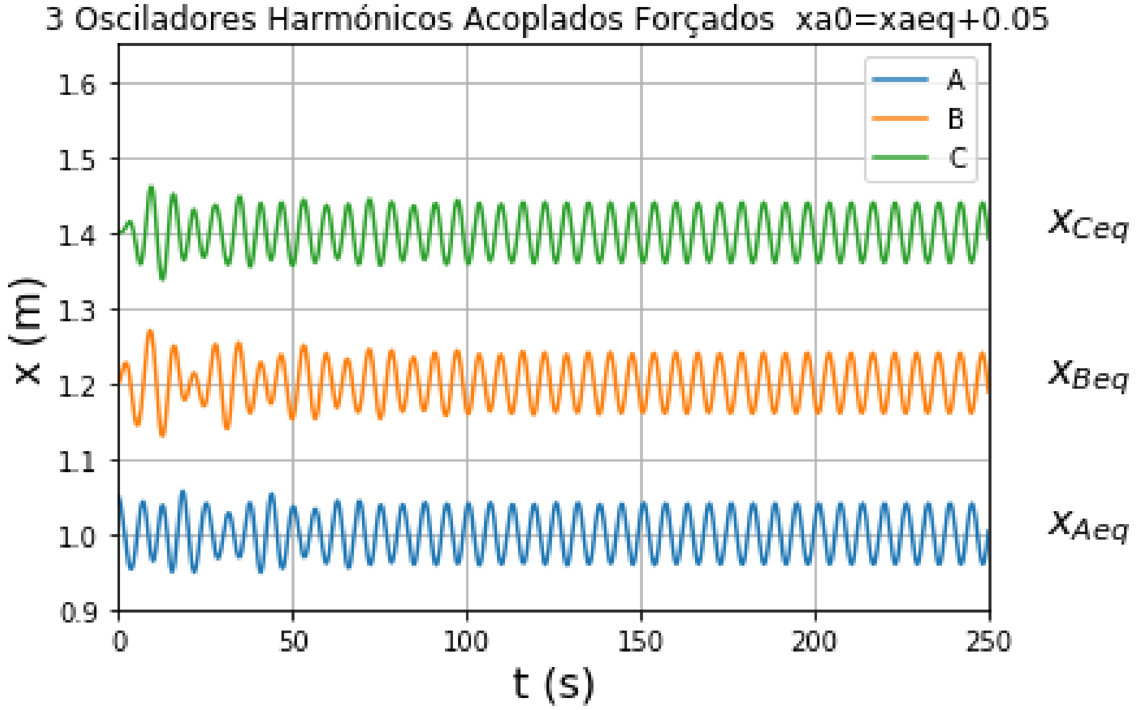
$F_0 = 0.04\ N$; $\omega_f = 1$ rad/s

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

$x_{B0} = x_{Beq}$

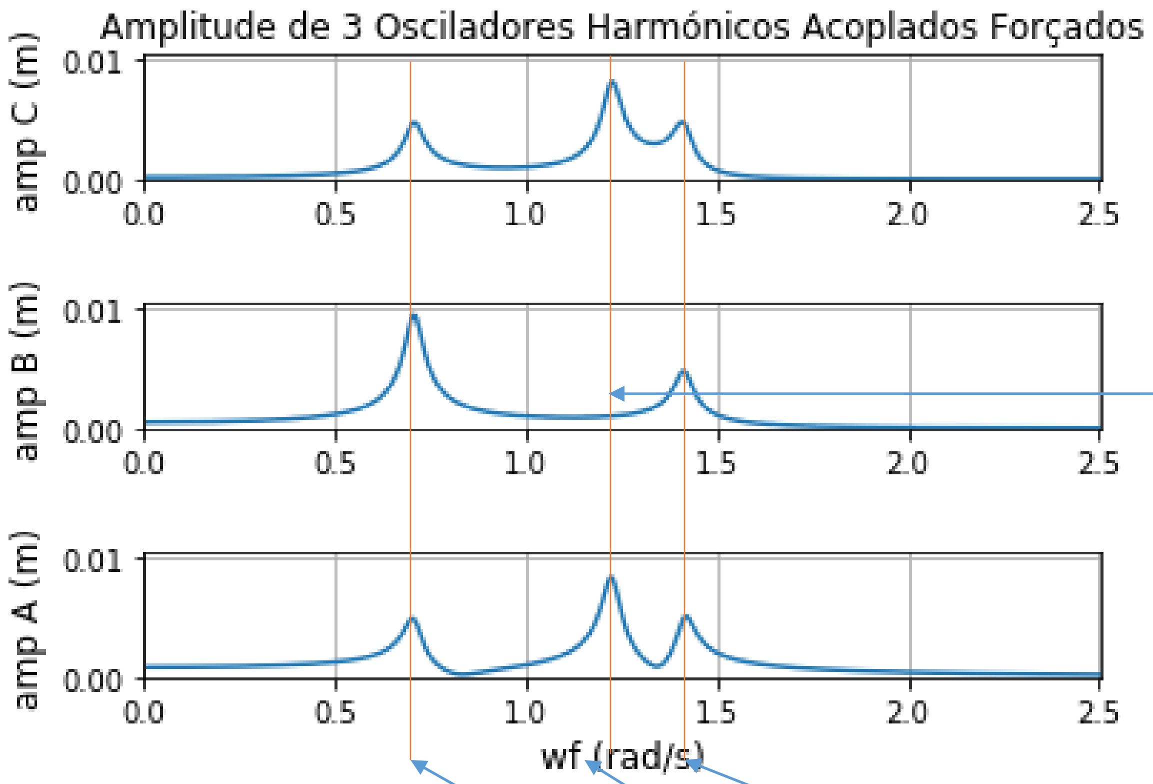
$x_{C0} = x_{Ceq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$



Cada corpo tende para um regime estacionário de um movimento harmónico simples, de frequência igual à da força exterior: $\qquad \omega_A = \omega_B = \omega_C = 1.000$ rad/s

Oscilador Harmónico Forçado: Amplitude no regime estacionário



Corpo B não participa no modo simétrico (ω =1.225rad/s)

Ressonâncias nas frequências $\omega_f = 0.703,$ 1.225 e 1.409 rad/s.

São as frequências dos modos normais

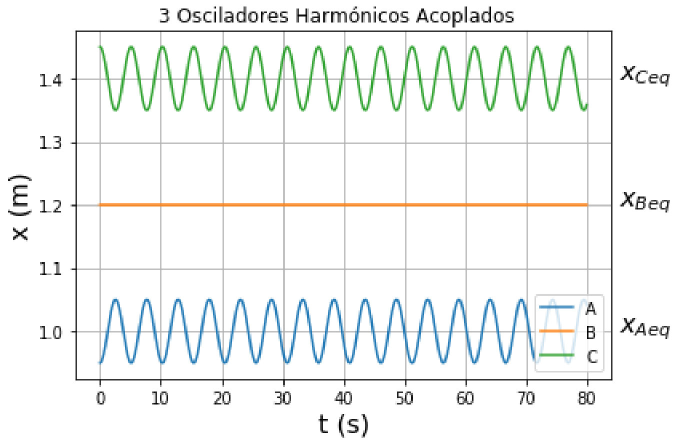
Osciladores Acoplados

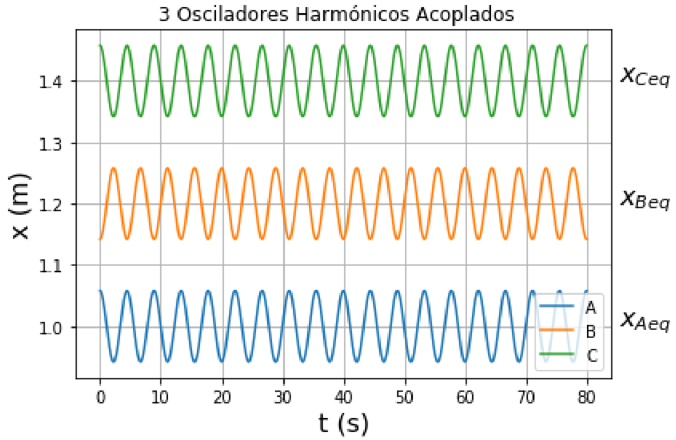
Modos normais:

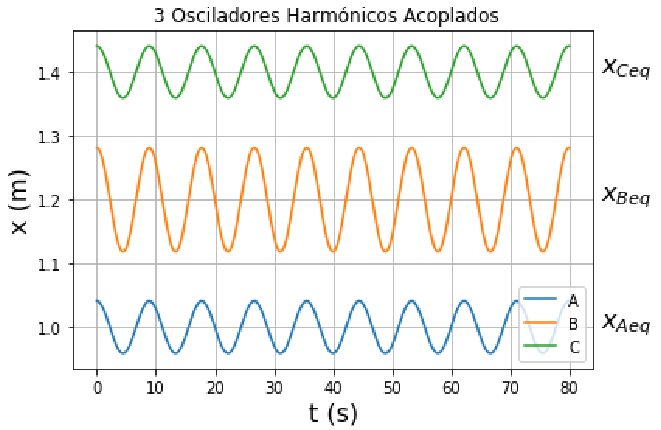
- Movimento sinusoidal (coseno ou seno) dos elementos do sistema
- Todos se movem com a mesma frequência angular,
  mas as amplitudes podem ser diferentes
- O número de modos é igual ao número de elementos do sistema (massas)

Qualquer dinâmica pode ser descrito como uma sobreposição dos modos normais.

A combinação específica é determinada pelas condições iniciais.





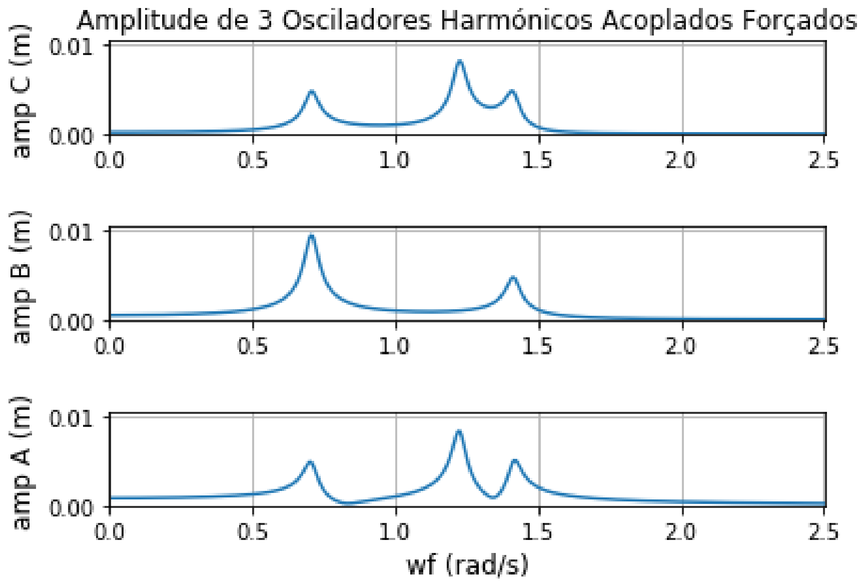


Modos Normais e Osciladores Forçados

Ressonância:

Quando são forçados por uma força exterior, apresentam Ressonância quando a frequência da força externa for igual à frequência dos modos normais.

⇒ Por medição pode-se determinar as frequências dos modos normais.



Modos Normais

Modos normais são:
- Medidos
- Calculados, ou por modelos ou por equações fundamentais da Física.

São usados no estudo da estrutura da matéria: Moléculas, Cristais, Sólidos, …

<u>Ex: Materiais:</u>

Experiência:

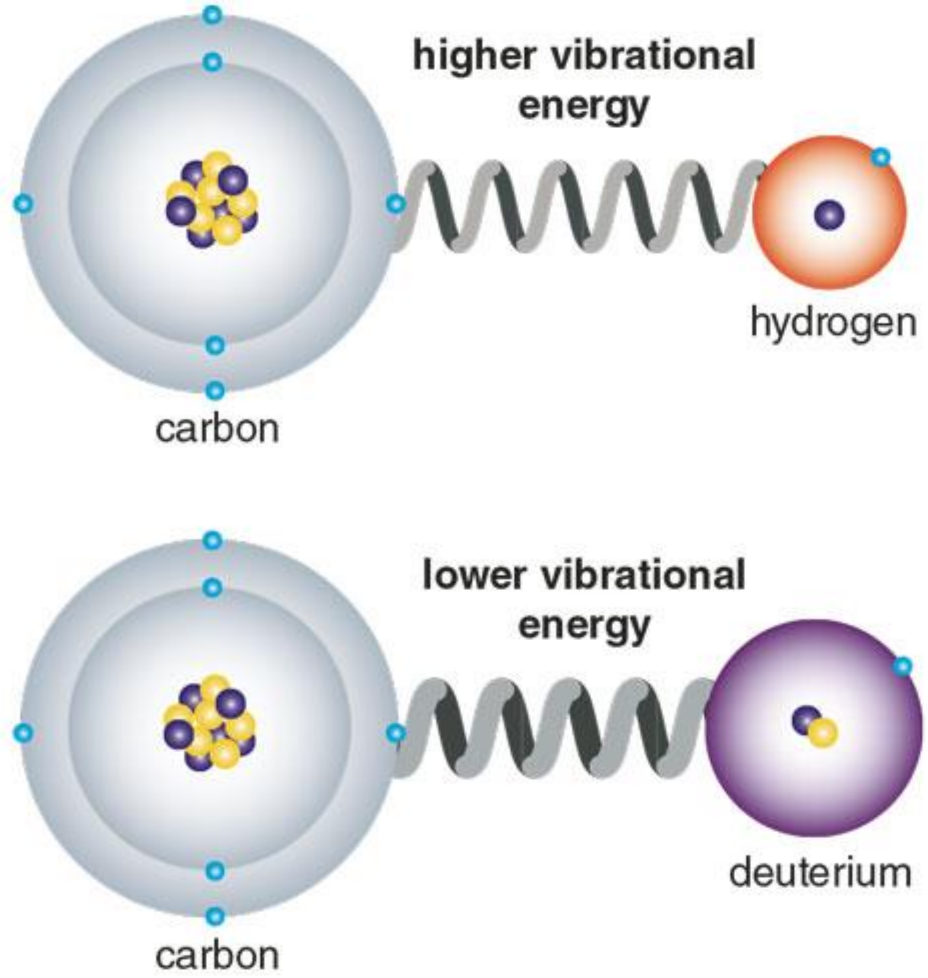
A matéria em estudo é excitada por luz laser, onda eletromagnética (campo elétrico)
Força elétrica= Carga * Campo Elétrico

Excita os núcleos atómicos, porque possuem carga elétrica positiva.
Quando a frequência do laser produz ressonância, obtêm-se os modos normais.

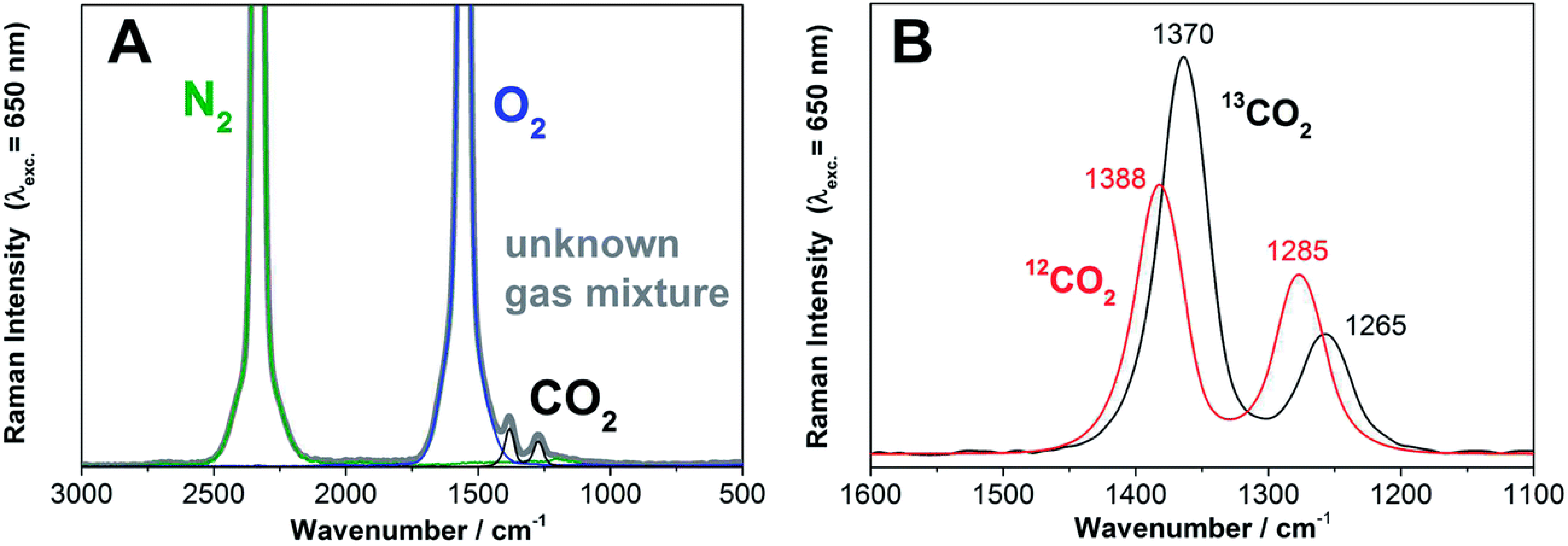
Teoria:

Modelos fenomenológicos – parâmetros ajustados aos valores experimentais dos modos normais
Primeiros Princípios: Todas as quantidades medidas calculadas pela equação fundamental da Mecânica Quântica.

Modos Normais e Ressonância

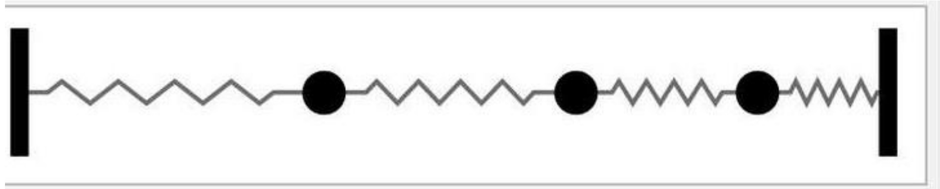


Modos Normais e Ressonância



Excitação por lazer, que mede as frequências de ressonância
e as dos modos normais serve para determinar a constituição química dos gases.

Problema: 3 osciladores acoplados



Três massas iguais, A, B e C, com massa *m=1* kg são acoplados como ilustrada no diagrama. Os constantes elásticas das molas são todos *k = 1*N/m.

O movimento das massas obedece o seguinte sistema de equações:

$$m\,\frac{d^2u_A}{dt^2} = -k\,u_A \; - k(u_A - u_B)$$

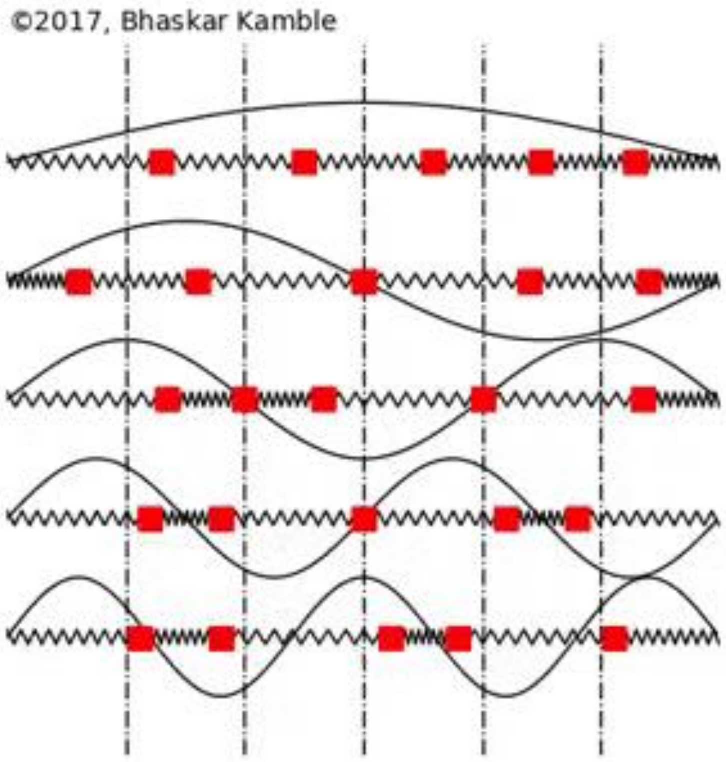
$$m\,\frac{d^2u_B}{dt^2} = -k(u_B - u_A) - k(u_B - u_C)$$

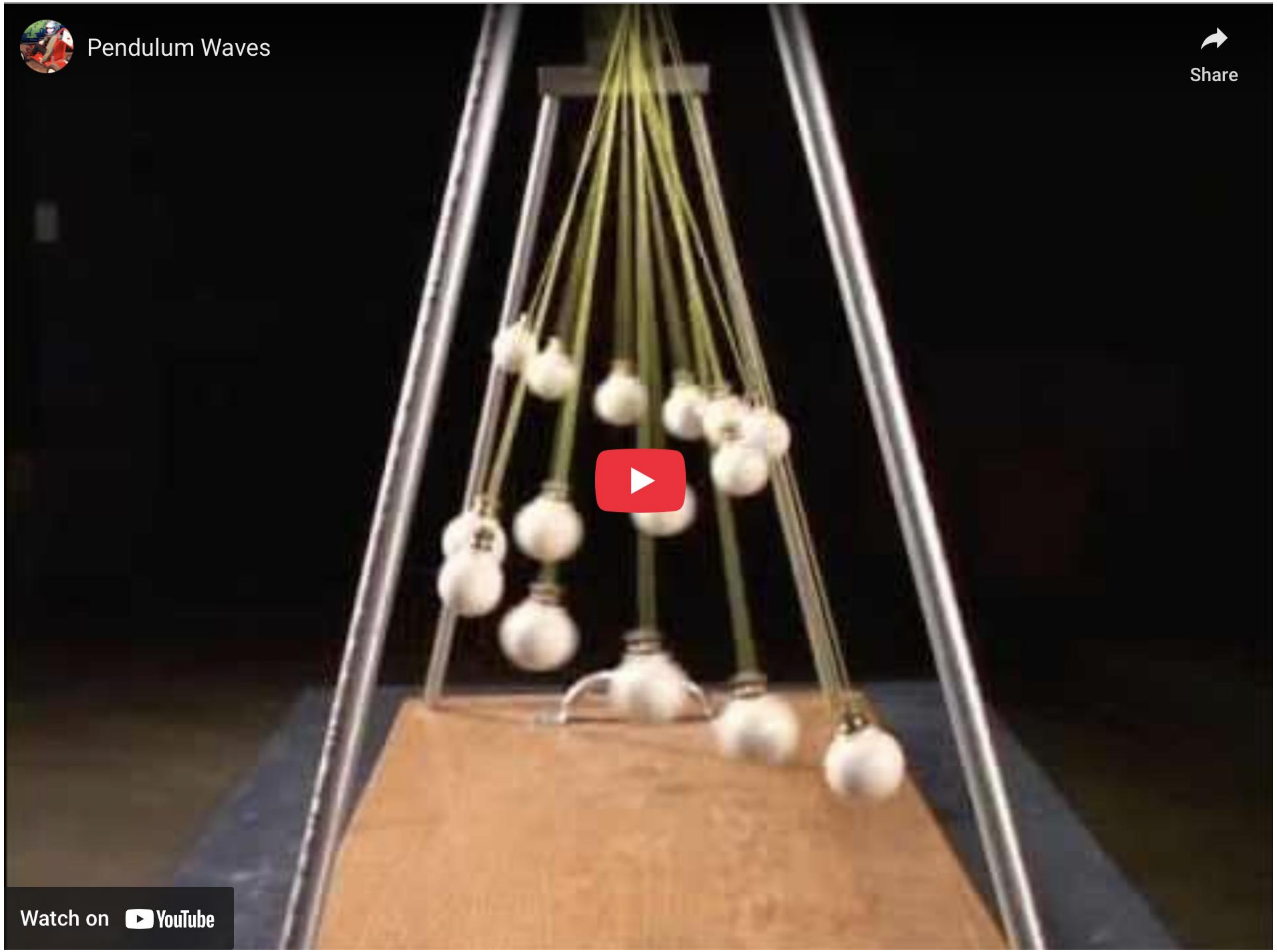
$$m\,\frac{d^2u_C}{dt^2} = \; -k\,u_C - k(u_C - u_B)$$

Onde u_A, u_B, u_C são as posições das massas A, B e C respetivamente, relativo às suas posições de equilíbrio.

Mostre que existe um modo normal com frequência $\omega = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ em que, no movimento das massas, sempre $u_A = u_C$ e $u_B = -\sqrt{2}u_A$.

N osciladores acoplados





https://youtu.be/yVkdfJ9PkRQ?si=GIIVUJddC8KMYmgk

N osciladores acoplados

- Massas iguais m
- Posições x_i , $i = 1,2,3, \ldots, N$
- Ligadas por molas de coeficiente k

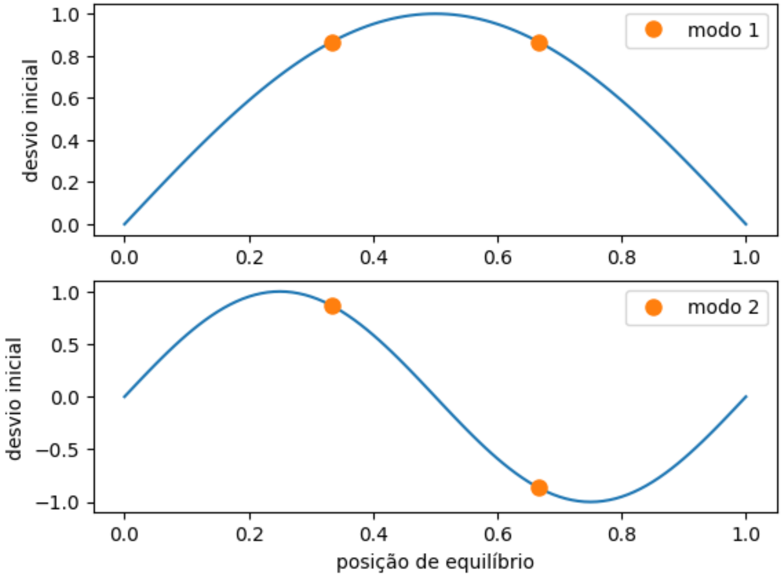
Equação de Newton:

$$\mathrm{m}\frac{d^2u_i}{dt^2} = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1})$$
$$= k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

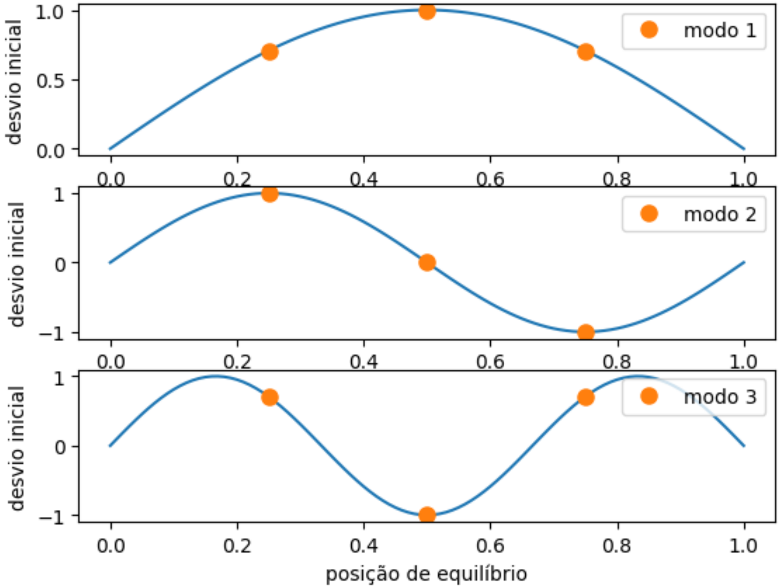
$u_i =$ desvio do ponto de equilíbrio

N osciladores acoplados: Modos Normais

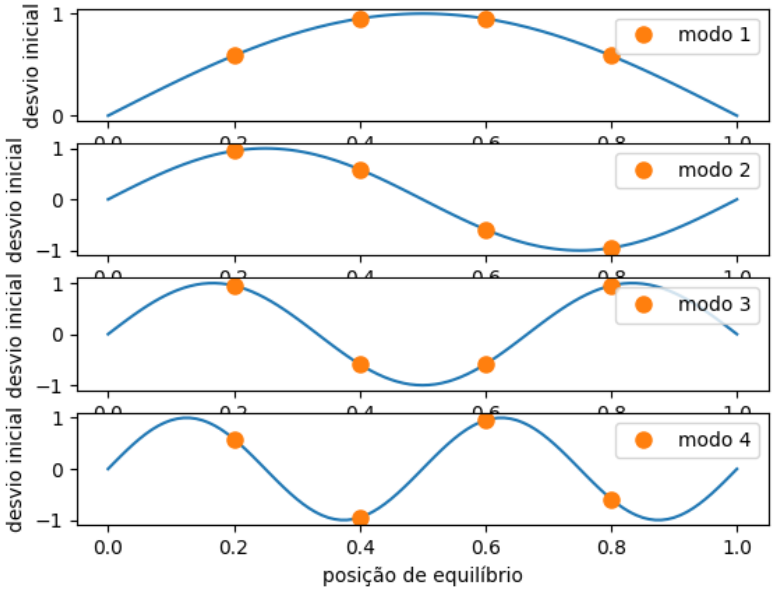
modos 2 osciladores



modos 3 osciladores



modos 4 osciladores



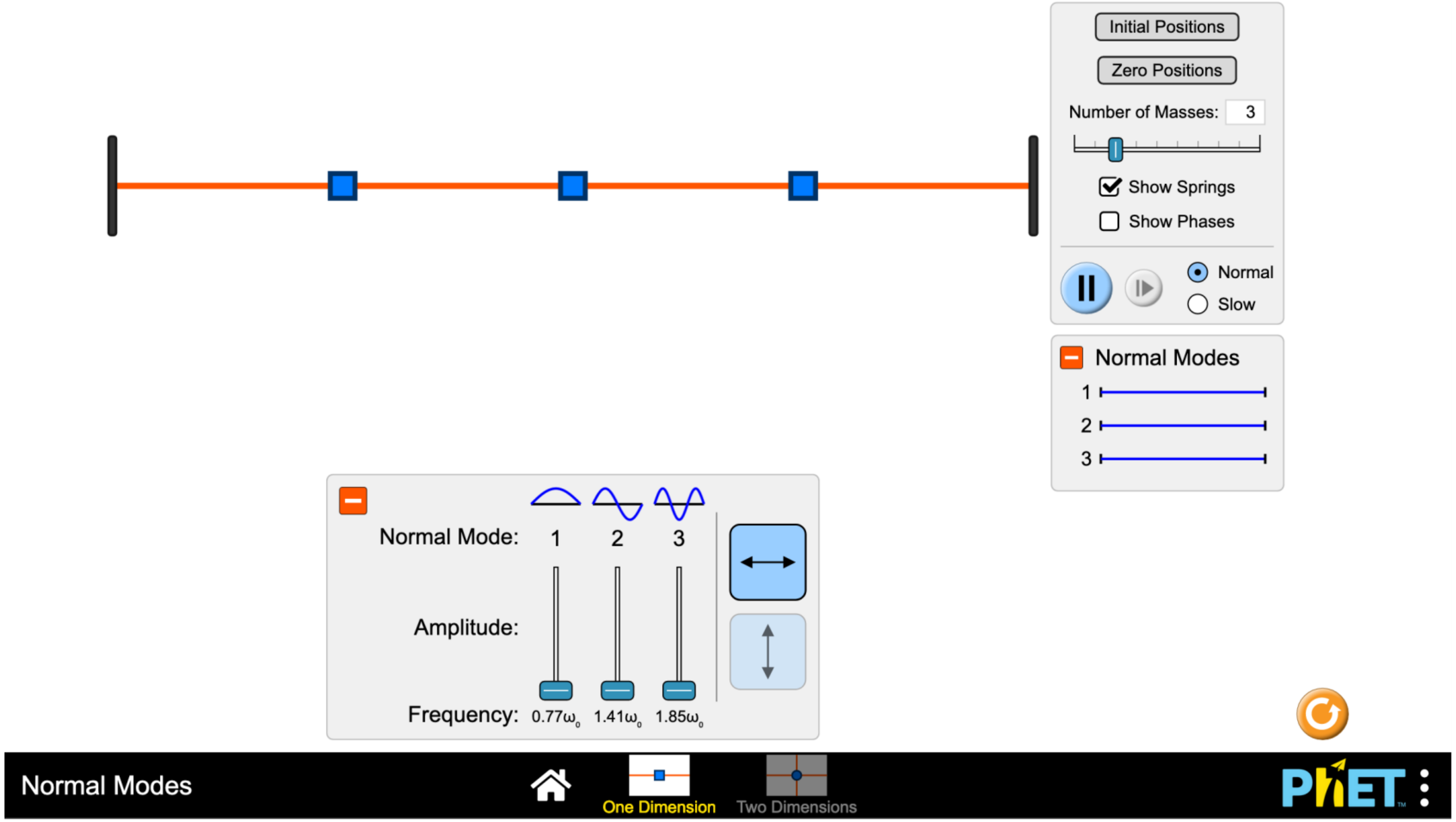
Se fazemos um plot dos desvios iniciais das massas, caem numa curva sinusoidal

Com período inversamente proporcional ao número do modo

A padrão continua para N=4, 5, 6…. corpos

MODOS NORMAIS Longitudinais e Transversais

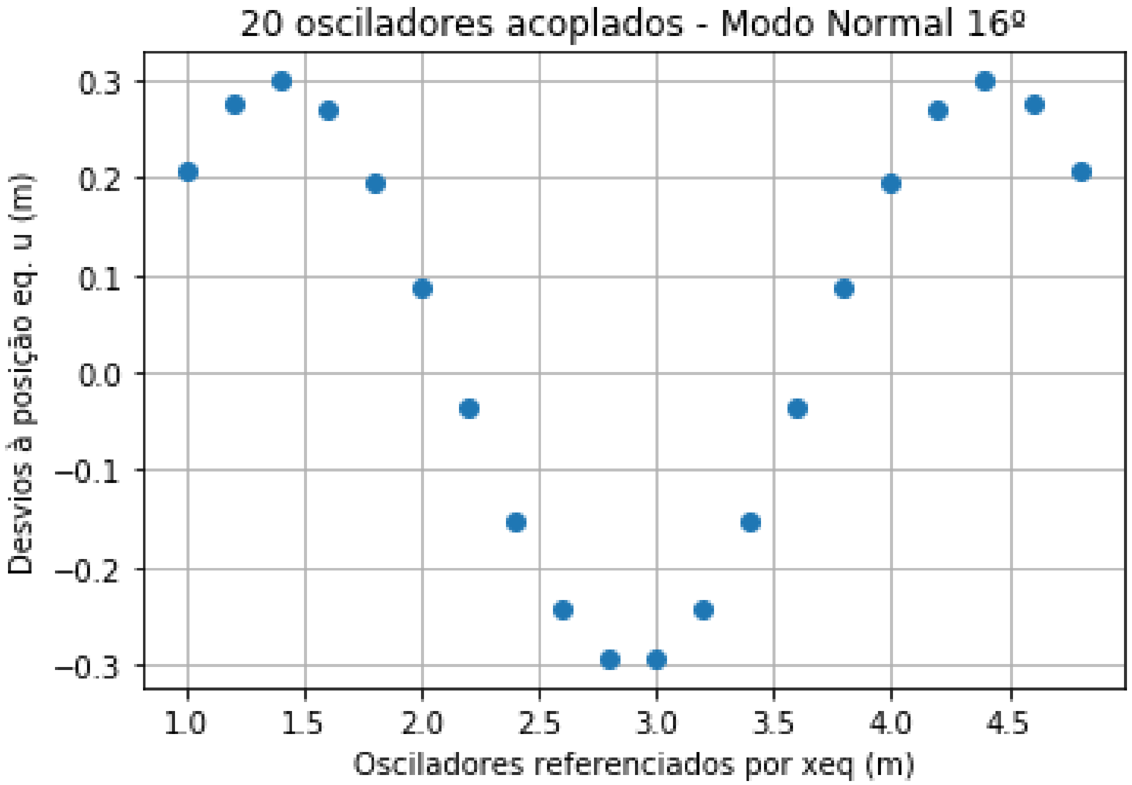
https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes_en.html



N osciladores acoplados: Modos Normais

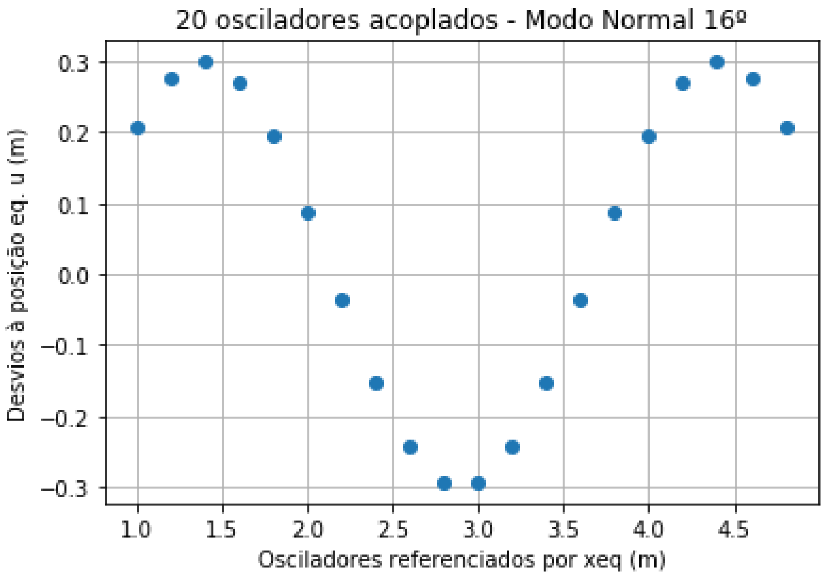
20 osciladores acoplados: modo normal 16º

Posição das massas num certo momento (”*snapshot*”)



N osciladores acoplados: Modos Normais

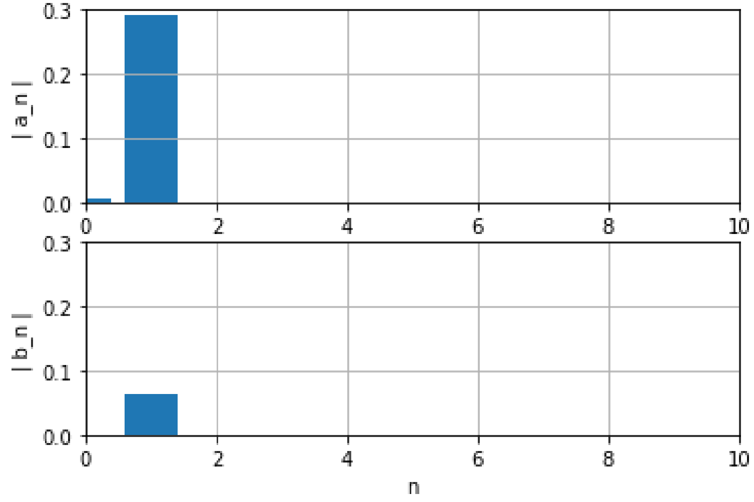
Considere 20 osciladores acoplados de igual massa. O modo normal longitudinal 16º apresenta os seguintes desvios às posições de equilíbrio:



Parece uma função sinusoidal!

O comprimento (período) dessa repetição (de máximo a máximo) é $\lambda = 4.4 - 1.4$ m = 3 m.

Coeficientes de Fourier

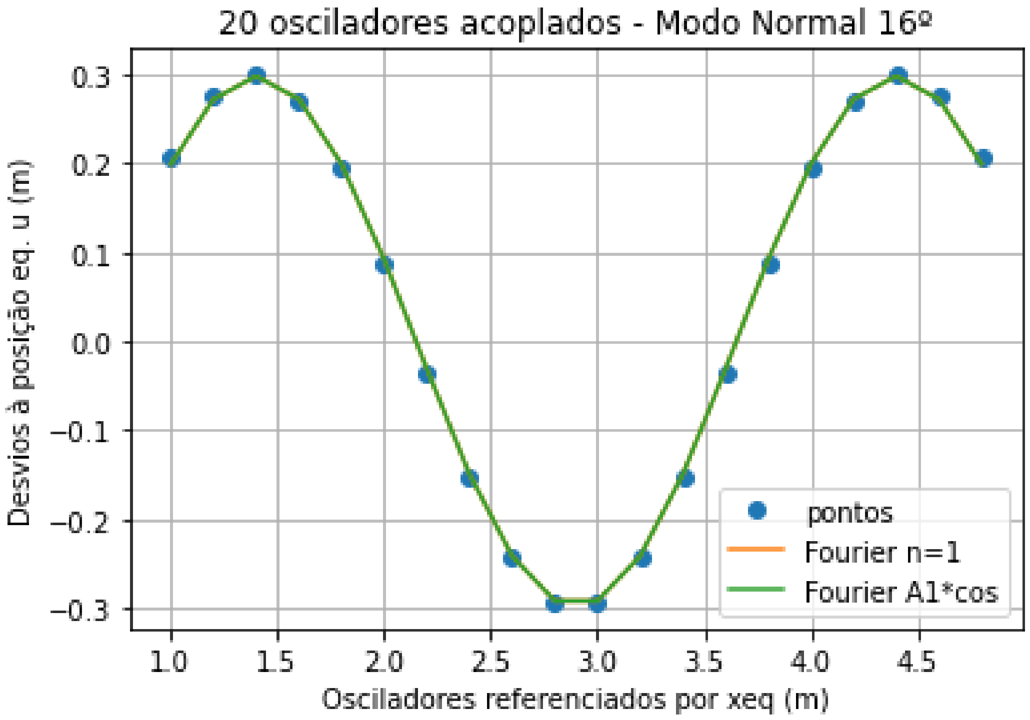


<u>Análise Fourier</u> desvios em função da posição (não do tempo)

Período T = 3m

N osciladores acoplados: Modos Normais

Considere 20 osciladores acoplados de igual massa. O modo normal longitudinal 16º apresenta os seguintes desvios às posições de equilíbrio:



O modo normal 16 usando só o termo de Fourier n=1:

$$u_{16}(x_{eq}) = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3} x_{eq}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{3} x_{eq}\right)$$

$$= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3} x_{eq} - \frac{2\pi}{3} 1.4\right)$$

u = desvio da posição de equilíbrio
em função de x_{eq} (posição de equilíbrio de uma massa)

Movimento periódico em tempo

e também periódico em espaço

Onda sinusoidal

N osciladores acoplados num modo normal

Cada oscilador com movimento sinusoidal:

$$u_i = A\cos(\omega t + \phi_i)$$

$$u_i = x_i - x_{i\,eq.}$$

ϕ_i varia com a posição $x_{i\,eq.}$: $\phi_i = -cx_{i\,eq.}$

c constante

Transmissão de energia, não instantânea

variaveis contínuas:

$$\phi = -cx$$

$$u = A\cos(\omega t - cx)$$

$\Rightarrow$ **Onda sinusoidal**

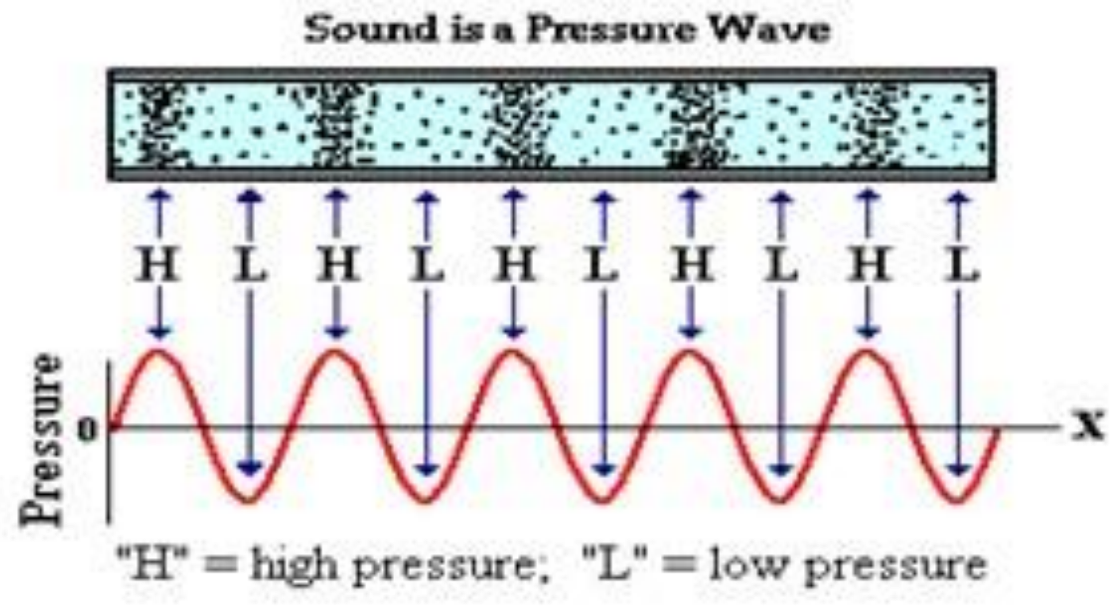
Cada modo normal corresponde a uma onda sinusoidal, que oscila no espaço e no tempo

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2 u \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = -k^2 u$$

Ondas

Ondas longitudinais

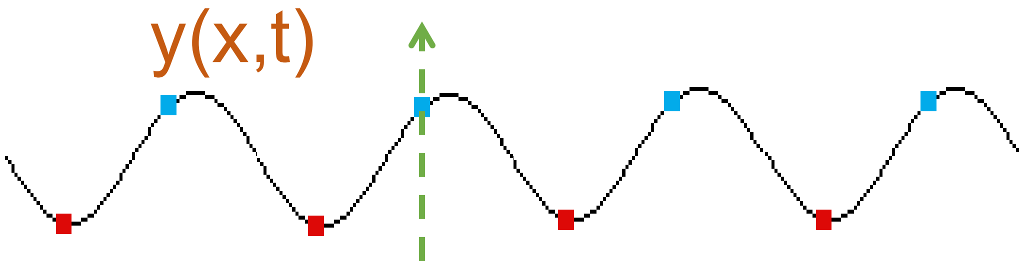
perturbação do meio tem a mesma direção da propagação da onda



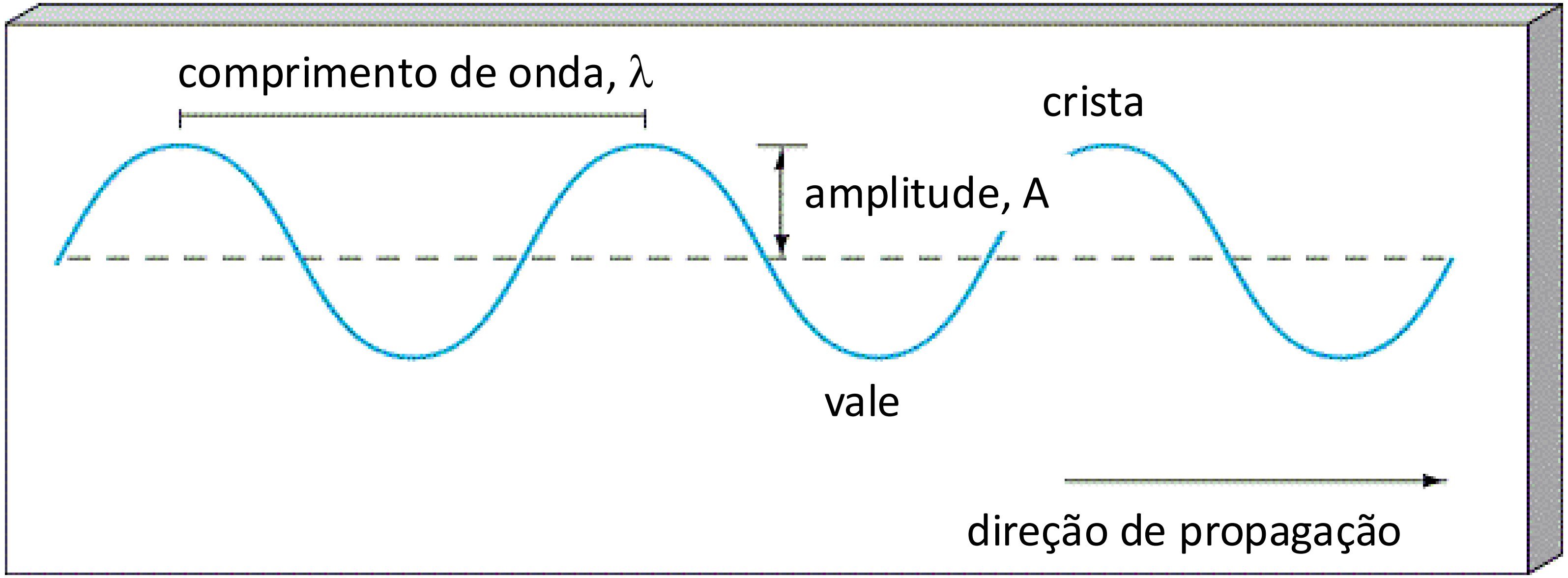
Ondas

Ondas transversais

a perturbação do meio é perpendicular à direção de propagação da onda



Características de uma onda



Repetição no tempo

$$T$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Repetição no espaço

$$\lambda$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = número de onda

Velocidade de propagação

$$v = \lambda f$$

Problema: Onda sinusoidal

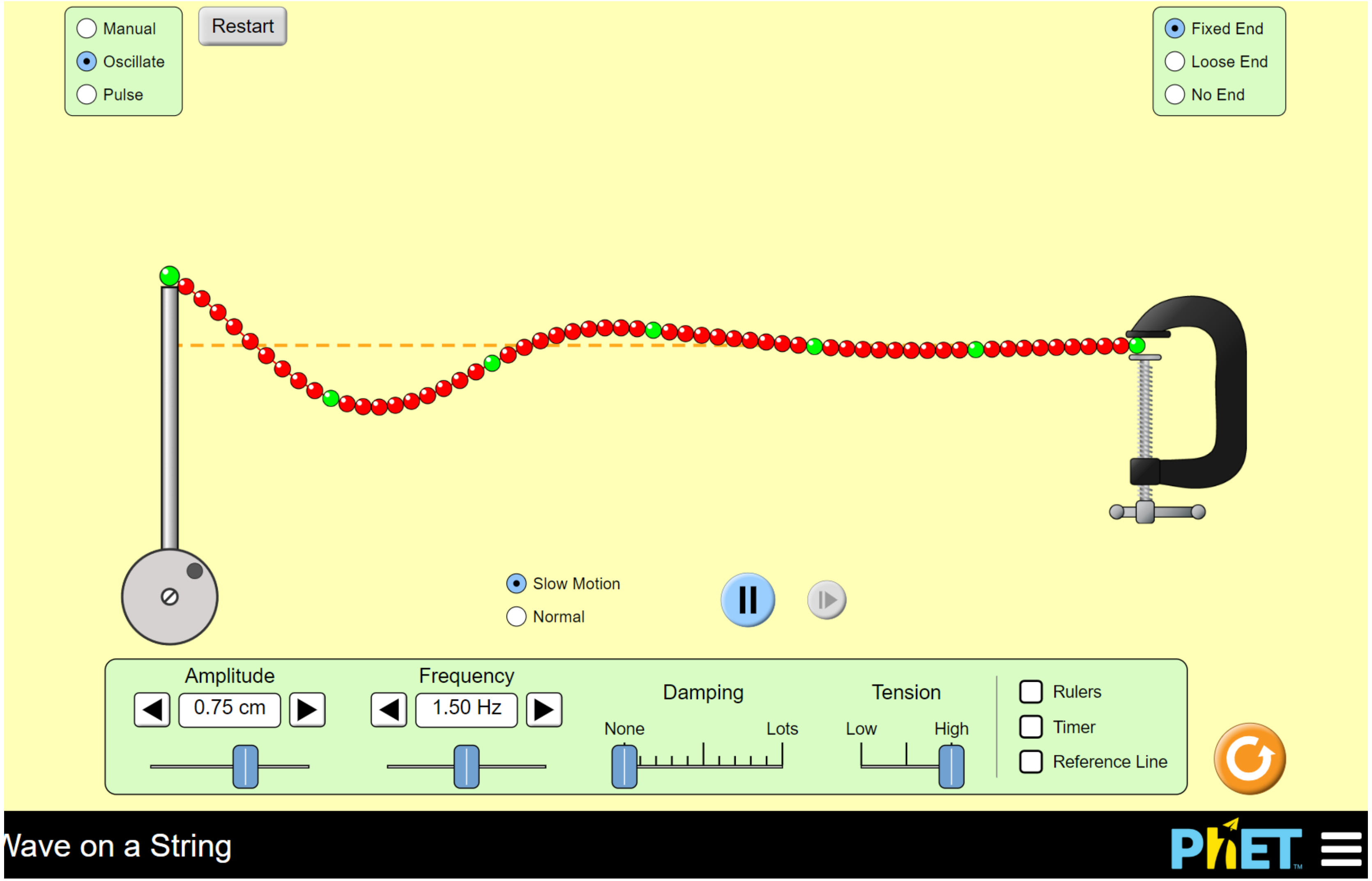
Uma onda transversal harmónica de frequência 400 Hz propaga-se numa corda com uma amplitude de 5 cm. Dois pontos separados de 5.0 cm estão num determinado instante desfasados de $\pi/6$ rad.

a) Determine o comprimento de onda.

b) Calcule o valor da velocidade de propagação.

c) Determine o valor máximo da velocidade de oscilação transversal

N osciladores acoplados: Movimento Geral



https://phet.colorado.edu/pt/simulations/wave-on-a-string

N osciladores acoplados: Movimento Geral

Movimento em modo *n*

$$u_i = A_n \cos(\omega_n t + \phi_{i,n})$$

$$\phi_{i,n} = -n\, c\, x_{i\ eq.}$$

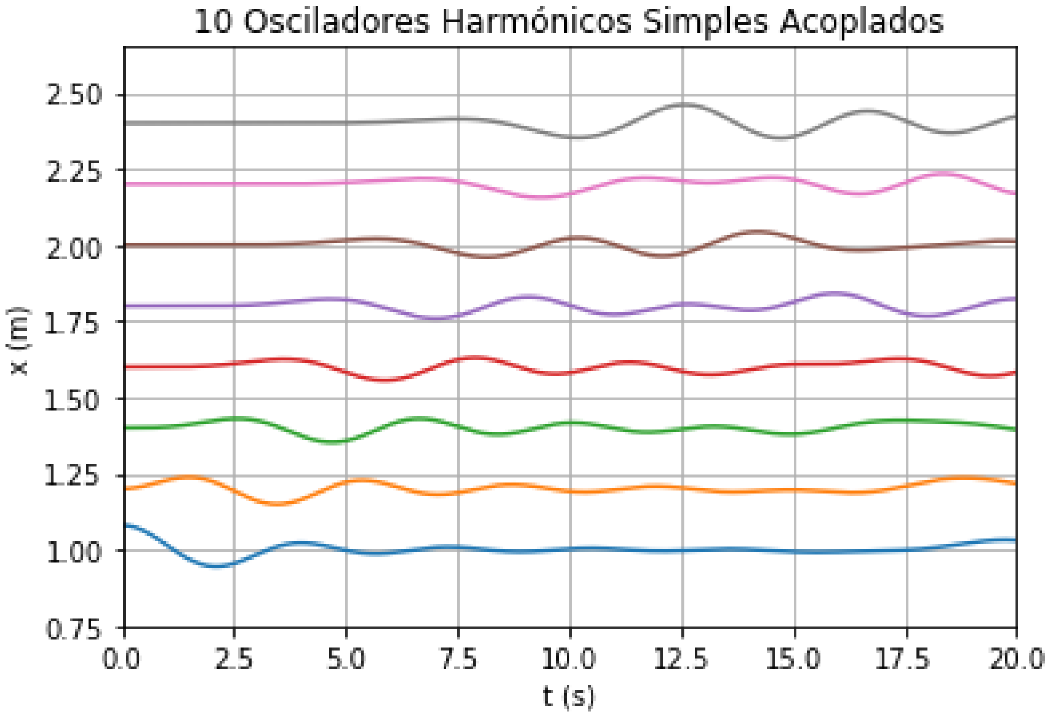
Em geral, o movimento é uma **sobreposição de modos normais**:

$$u_i = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(\omega_n t + \phi_{i,n})$$

as poições iniciais têm a forma de uma série de Fourier parcial.

N osciladores acoplados

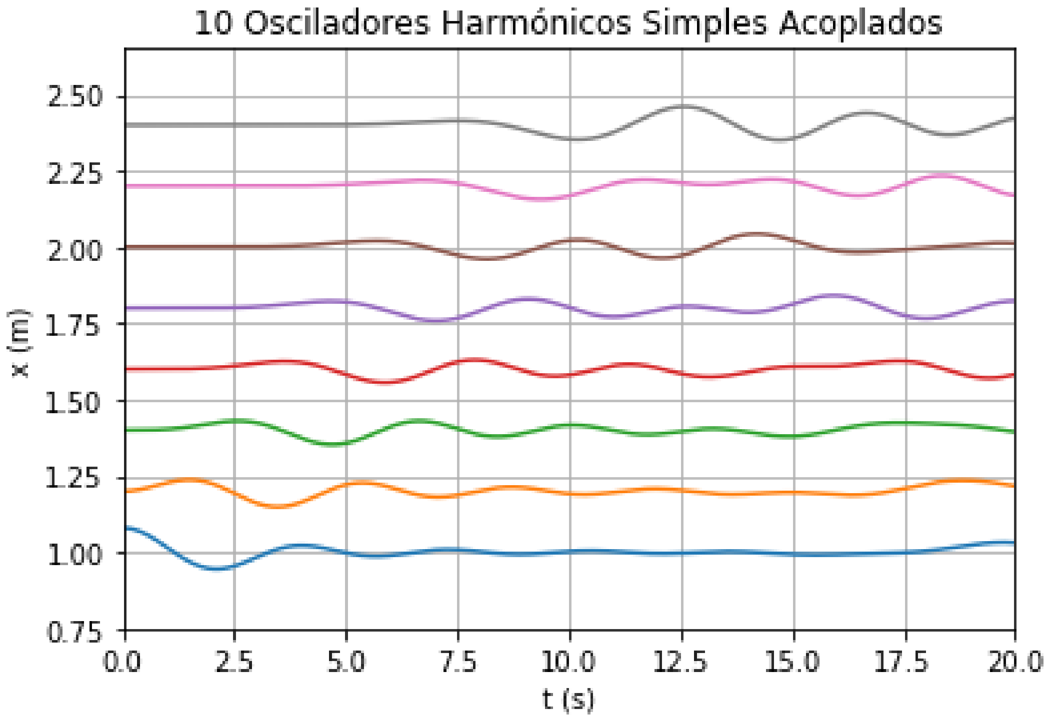
Propagação de um sinal em N osciladores acoplados



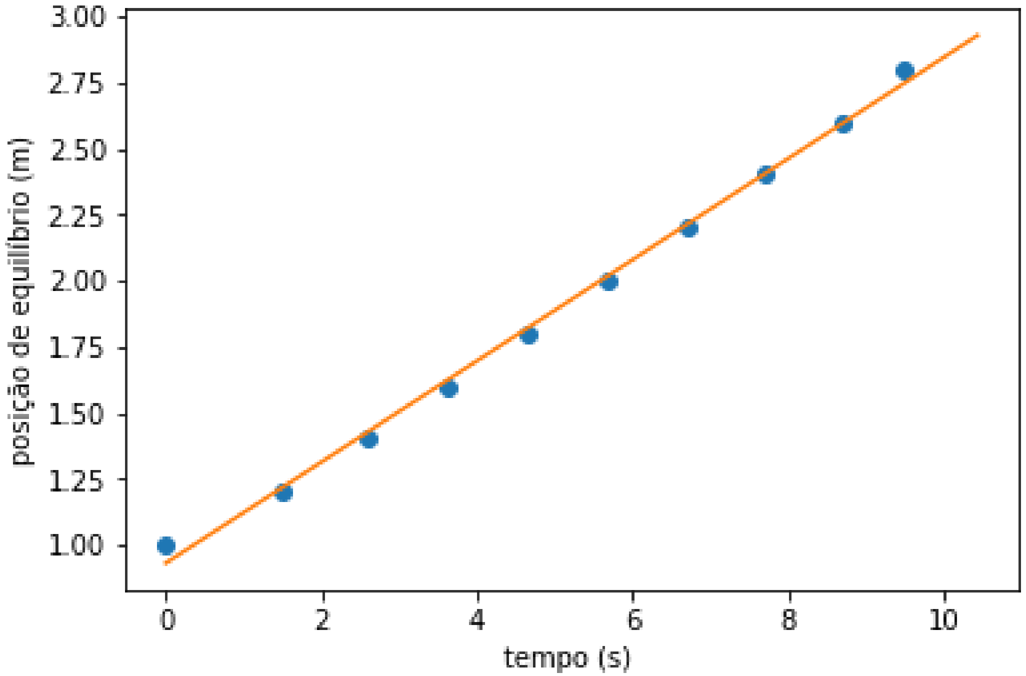
Acoplamentos de osciladores: Transmissão de energia, não instantânea

N osciladores acoplados

Propagação de um sinal em N osciladores acoplados



Tempo do primeiro máximo



Velocidade de propagação da perturbação 0.192 ± 0.004 m/s

Acoplamentos de osciladores: **Transmissão não instantânea de informação e de energia**

Equação da Onda 1D

Com transmissão de energia, o movimento não é necessáriamente sinusoidal

<u>Número grande de osciladores acoplados</u>,

Posições x_i a distância $\delta x = x_{i+1} - x_i$
Massa $m = M\ \delta x$
Ligadas por molas de coeficiente $k = K/\delta x$

u_i = desvio do ponto de equilíbrio
Longitudinal ou transversal

(se aumentar o número de osciladores, k deve aumentar e m deve diminuir)

Equação de Newton:

$$\mathrm{m}\frac{d^2u_i}{dt^2} = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1})$$

$$= k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

Equação da Onda 1D

<u>Número grande de osciladores acoplados</u>, $\mathrm{m}\frac{d^2u_i}{dt^2} = k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$

Escrever $u_i = u(x_i, t)$, função contínua de variáveis x e t

Expansão de Taylor:

$u_{i+1} = u_i + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{u_i} \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{u_i} \delta x^2 + \sigma(\delta x^3)$, $\quad u_{i-1} = u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{u_i} \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{u_i} \delta x^2 + \sigma(\delta x^3)$

$$\Rightarrow \mathrm{m}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = k\left\{\left(u_i + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{u_i} \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{u_i} \delta x^2\right) - 2u_i + \left(u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{u_i} \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{u_i} \delta x^2\right)\right\} + \sigma(\delta x^3)$$

$$= k\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{u_i} \delta x^2 + \sigma(\delta x^3)$$

Equação da onda em 1D

$$\lim_{\delta x \to 0} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta x^2 = \frac{K}{M\delta x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta x^2 = \frac{K}{M}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$k = K/\delta x \qquad m = M\,\delta x \qquad v^2 = \frac{K}{M}$

Equação da Onda

Equação da onda em 1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Equação da onda em 3D

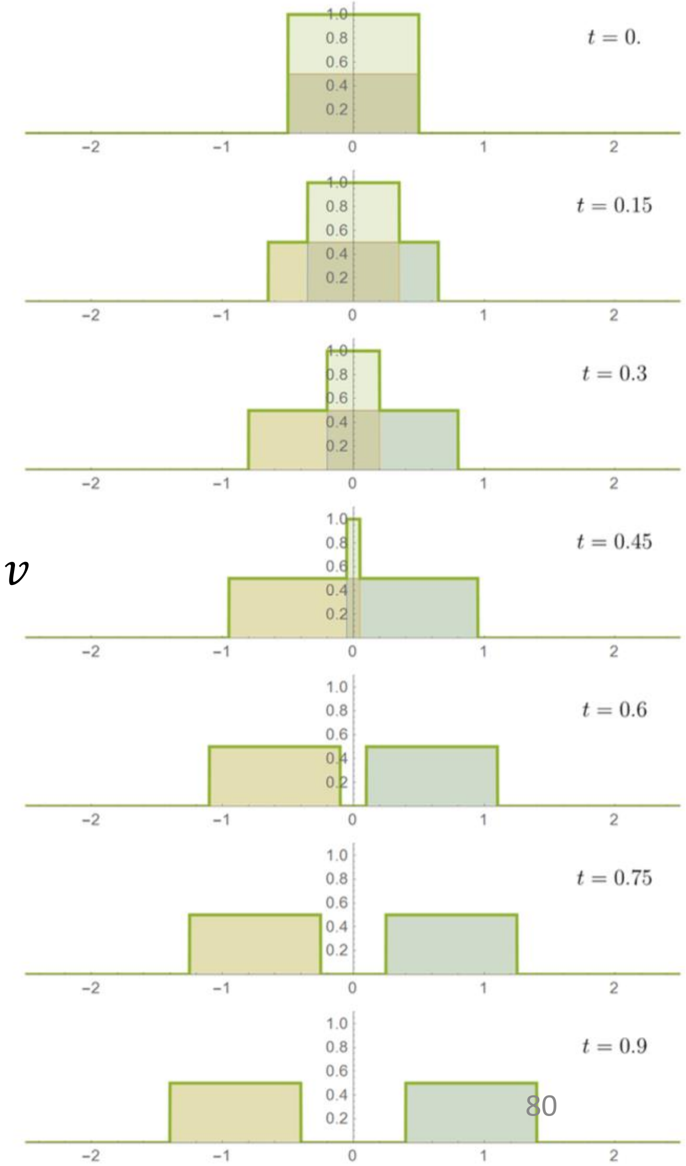
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

$u(x,t) =$ desvio da posição de equilíbrio a posição x e tempo t
Pode ser longitudinal ou transversal

- Propagação de som
- Ondas no oceano
- Vibração de uma corda
- Ondas eletromagnéticas
- …

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Equação da Onda 1D



<u>Solução geral</u> **meio infinito**

Ex: corda muita comprida, fluido num tubo, agua num canal…

Condição inicial: $u(x,0) = f(x)$

Duas soluções:

$u_1(x,t) = f(x - vt)$ movimento à direita com velocidade v
$u_2(x,t) = f(x + vt)$ movimento à esquerda com velocidade v

mantem-se a forma original da onda.

Sem outras condições, a solução geral é a sobreposição de u_1 e u_2:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x - vt) + f(x + vt)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Equação da Onda 1D

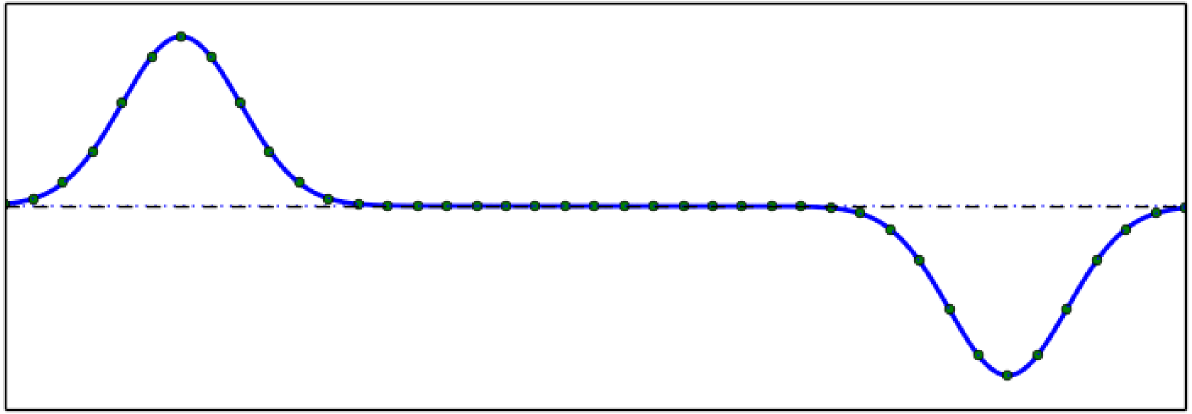
<u>Principal de sobreposição</u>

Se $u_1(x,t)$ é uma solução, e $u_2(x,t)$ e outra solução, então

$$u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

é também uma solução

Ex: 2 pulsos movendo em sentidos apostos:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Equação da Onda 1D

<u>meio finito:</u> **corda fixa nas extremidades 0 e L**

Condiçoes de fronteira: $u(0,t) = 0, u(L,t) = 0$

Tentar solução da forma $u(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 u, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \Rightarrow \omega = k\, v$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = A\sin(kL)\cos(\omega t) = 0 \qquad \Rightarrow kL = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \qquad \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

$$u(x,t) = A\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi v}{L}t), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Modos normais de vibração

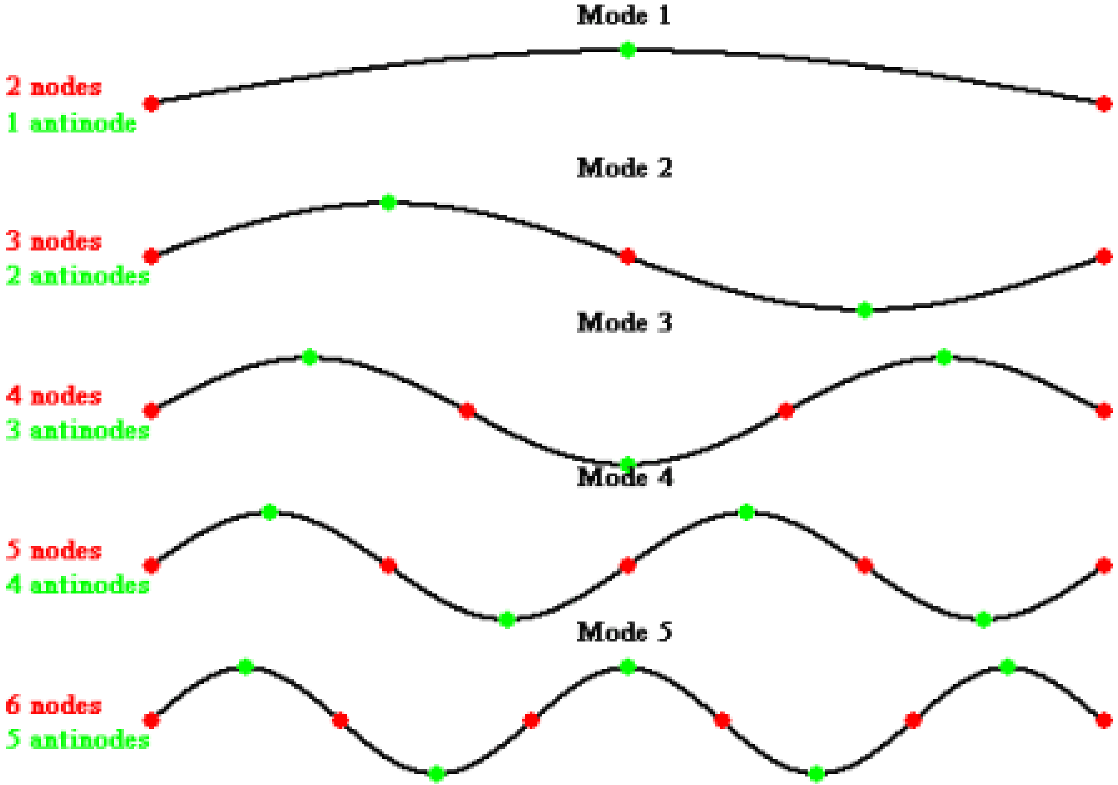
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Equação da Onda 1D

<u>corda fixa nas extremidades 0 e L</u>

$$u(x,t) = A\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi v}{L}t)\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Modos normais de vibração



Qualquer movimento da corda é uma sobreposição dos MODOS NORMAIS

Compare: série de Fourier

isvr

Problema: Modos normais de uma corda

A vibração de uma corda obedece a equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

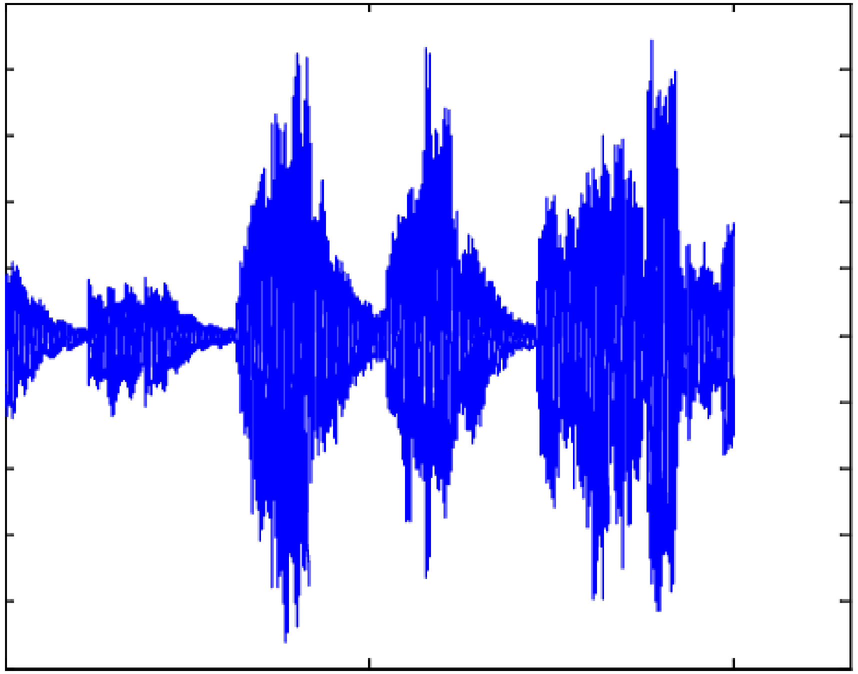
a) Mostre que a função $u(x,t) = A\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi v}{L}t)$ é solução à equação da onda, e que satisfaz a condição que a corda não pode mexer nas extremidades: $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

b) Calcule as frequências de vibração (em Hertz) dos primeiros três modos normais ($n = 1,2,3$), se considere $L = 1\text{m}$ e $v = 400\text{m/s}$.

Sinais

Um sinal é uma função que varia em espaço e tempo, usada para transmitir informação

Ex. sinal elétrico ou ótico em telecomunicações, sinal eletromagnético para rádio ou televisão



Sinais

Função de um sinal $f(t)$
pode ser representado como a sobreposição de funções sinusoidais (modos normais)
ou seja, a série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t\}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \exp(i\omega_n t) \, dt \qquad n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

$$\omega_n = n2\pi/T$$

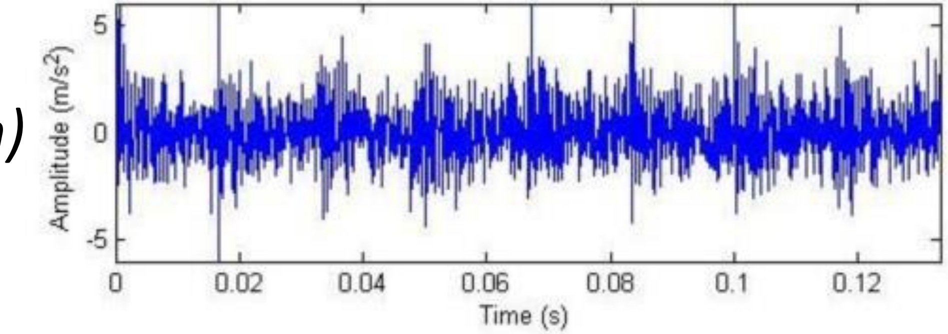
Os coeficientes (a_n e b_n, ou c_n) podem ser considerados uma função de frequência ω

No limite $T \to \infty$ os valores de ω_n são contínuas: **Transformada de Fourier**

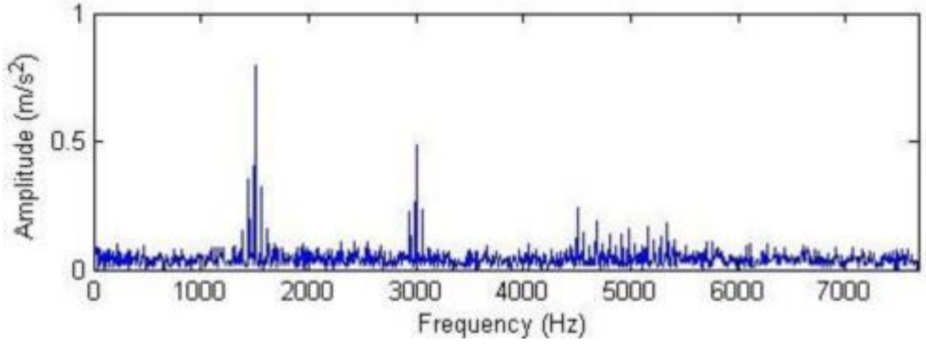
Sinais

Um sinal pode ser representado:

no domínio de tempo: $f(t)$ = forma de onda (*waveform)*



OU no domínio de frequências: : $c(\omega)$ = espectro



as duas representações contêm a mesma informação

Digitalização de sinais

Para representar perfeitemente um sinal contínua $f(t)$, durante um período T, precisamos de um número infinito de coeficientes de Fourier.

Se os dados foram em tempos discretos, $f(t_i)$ com intervalo $\delta t = t_{i+1} - t_i$, é só preciso um número finito de coeficientes.

Teorema de Nyquist:

Se um sinal não contém frequências maiores do que f , o sinal pode ser completamente determinado com valores medidos em pontos separados por menos do que $\delta t = \frac{\pi}{\omega}$

$$\Leftrightarrow$$

Se os dados consiste de uma sequência de valores em tempos com intervalo δt, a frequência máxima necessário para representar o sinal é $\omega = \frac{\pi}{\delta t}$.

Digitalização de sinais

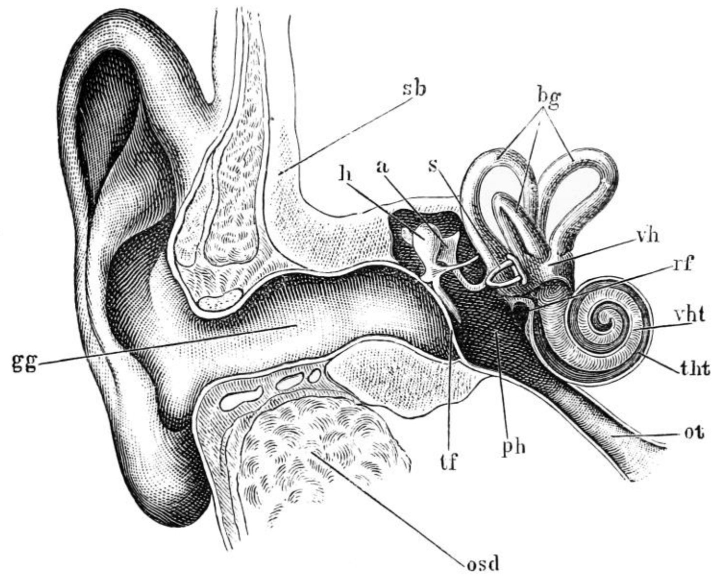
Aplicação: **Digitalização de sinal áudio**

O sistema auditivo humano está limitado a perceber frequências entre 20 Hz e 20 000 Hz.

$f = 20000\ Hz \quad \Leftrightarrow$ amostragem com $\delta t = 1/40000 s$ é suficiente para determinar o sinal dentro dos limites de percepção.

Um sinal audio pode ser digitalizado sem nenhum perda aparente de qualidade

Ex: Audio CD e MP3: 44100 valores por segundo



Digitalização de sinais

<u>Compressão de sinal áudio</u>

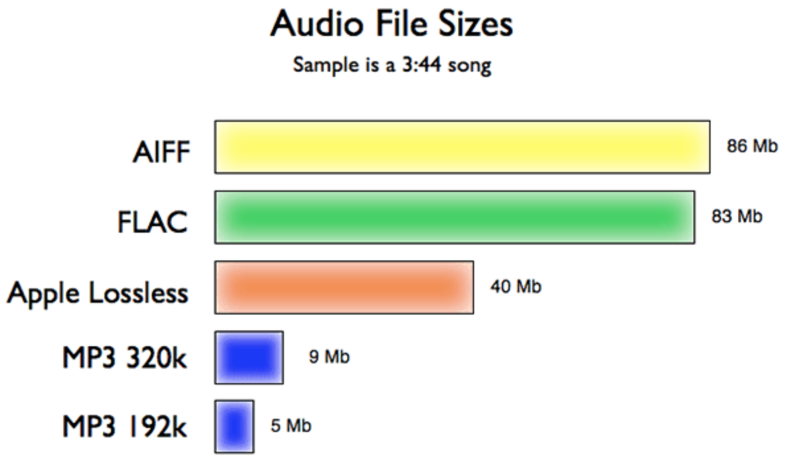
Algoritmo MP3 (muito simplificado):

1. Amostragem do sinal audio
   44100 valores/s, amplitude 16--24bit /canal

2. Transformação discreta de Fourier
   representação no domínio de frequências

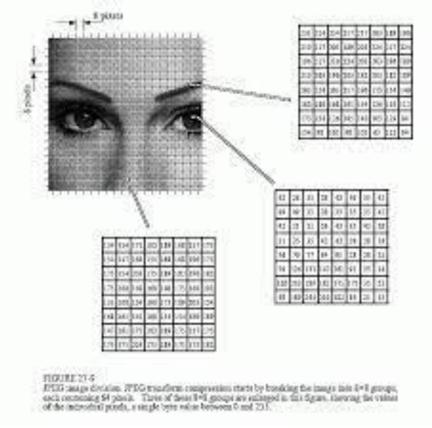
3. Modelo psicoacústica
   eliminar soms inaudíveis, redução seletiva de resolução

4. Compressão dos dados

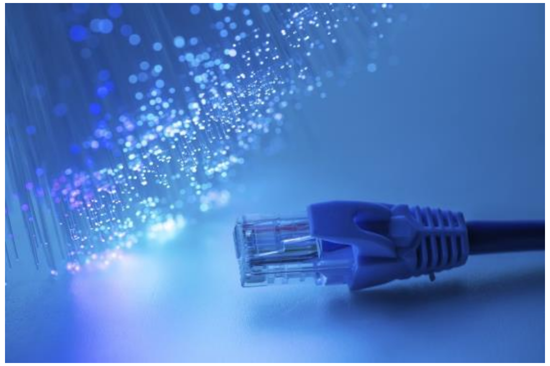


Processamento de sinais

<u>Outras aplicações:</u>



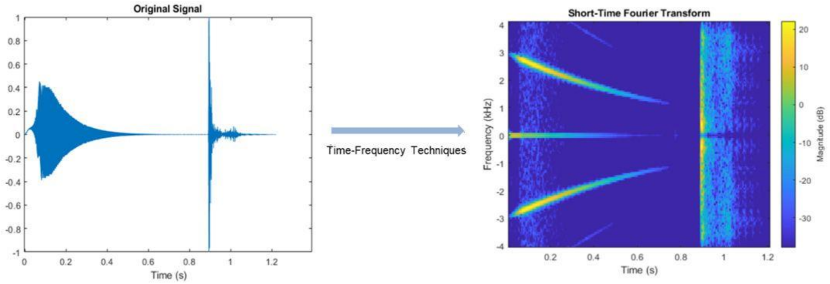
Processamento e compressão de video e imagens



Telecommunicações (ex: dados fibra, cellular)

Reconhecimento de fala

Aprendizagém de máquina (ex: feature extraction)



…