Licenciatura em Engenharia Informática

Sistemas Multimédia

Representação de Sinais por Sinusoides

Telmo Reis Cunha

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática
Universidade de Aveiro – 2020/2021

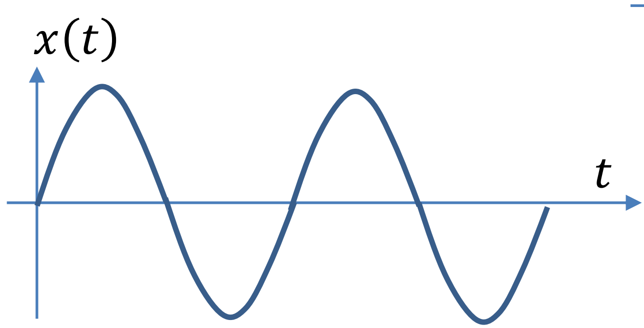
1. Contexto

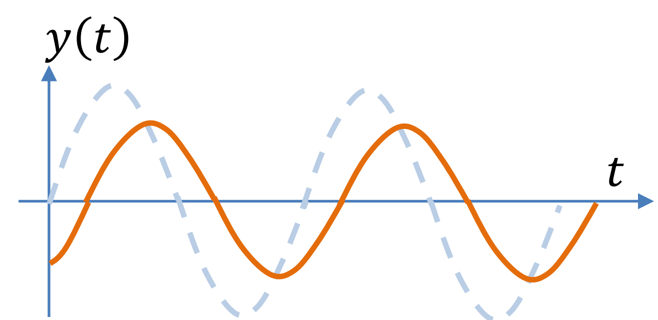
- Muitos sistemas que operam com sinais multimédia (som, imagem, vídeo, …) preservam, tipicamente, a forma desses sinais.

- São, usualmente, sistemas lineares.

- Os sistemas lineares apresentam a propriedade de responder a um sinal sinusoidal com outro sinal sinusoidal, com a mesma frequência.

$x(t) = \sin(\omega_o t)$ → Sistema Linear → $y(t) = A \cdot \sin(\omega_o t + \phi)$





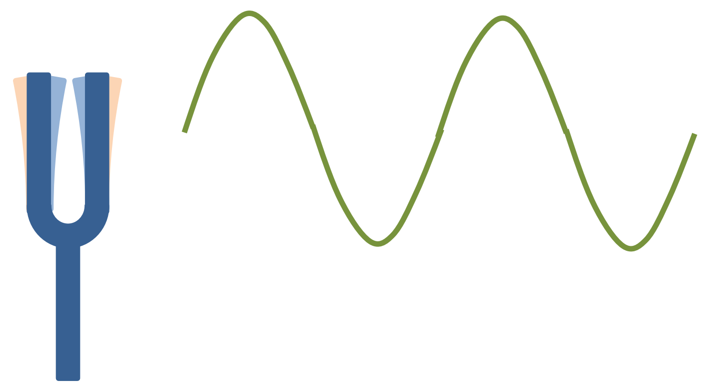
1. Contexto

- Essa propriedade permite:
  - Decompor um determinado sinal numa soma de sinusoides;
  - Analisar como é processada cada componente sinusoidal, uma-a-uma;
  - Determinar o resultado do processamento do sinal original, somando os resultados das componentes sinusoidais.
- Este é um princípio muito relevante na análise e processamento de sinais multimédia.

1. Contexto

- Uma outra observação é a natureza sinusoidal (ou quase-sinusoidal) de muitos fenómenos oscilatórios.

- Por exemplo, um diapasão (ou uma corda de um instrumento, etc.) vibra de forma sinusoidal (logo, o som que produz segue essa forma).



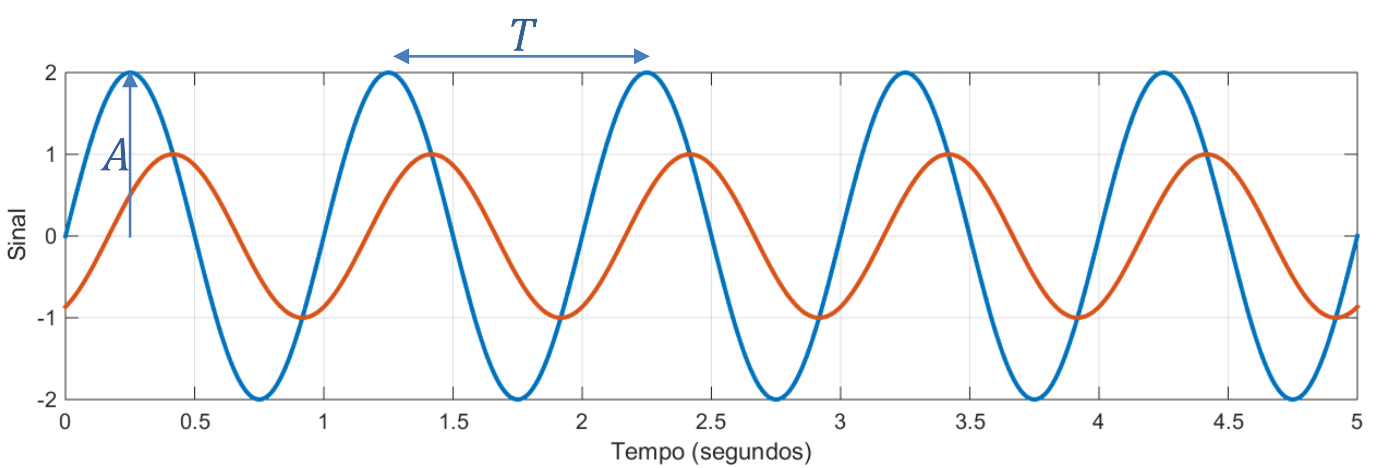
- Assim, o estudo e a composição de sinais sinusoidais torna-se muito relevante.

2. Sinal Sinusoidal

Um sinal sinusoidal define-se por:

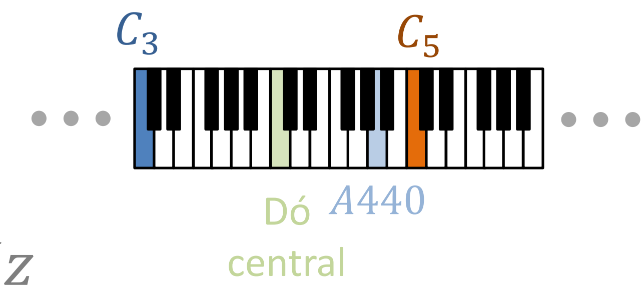
$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

- ω – Frequência, em rad/s.
- f – Frequência, em Hz, tal que $\omega = 2\pi f$.
- T – Período, em segundos, tal que $T = 1/f$.
- A – Amplitude.
- ϕ – Fase (relativamente ao instante definido como inicial), em rad.



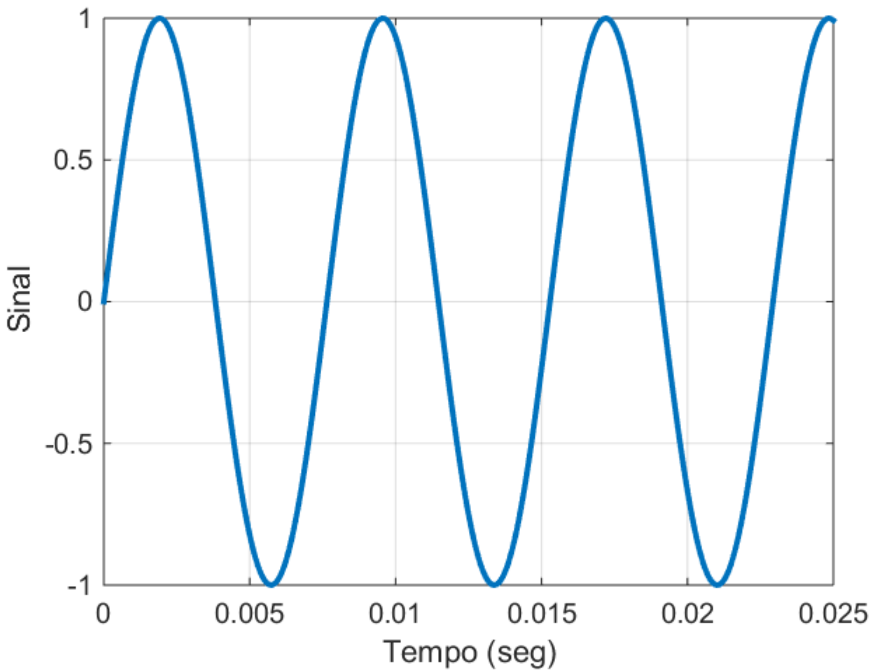
2. Sinal Sinusoidal

Exemplos associados a som:

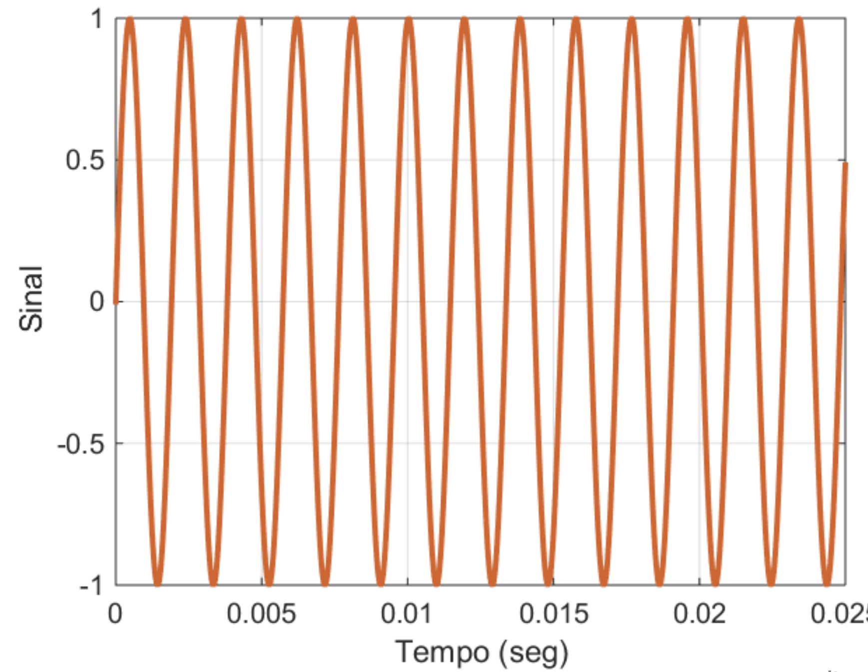


$$f(n) = 2^{\left(\frac{n-49}{12}\right)} 440\ Hz$$

$C_3\ (n = 28): f = 130.8\ Hz$

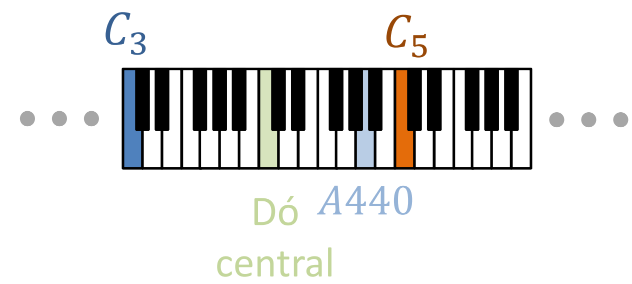


$C_5\ (n = 52): f = 523.3\ Hz$



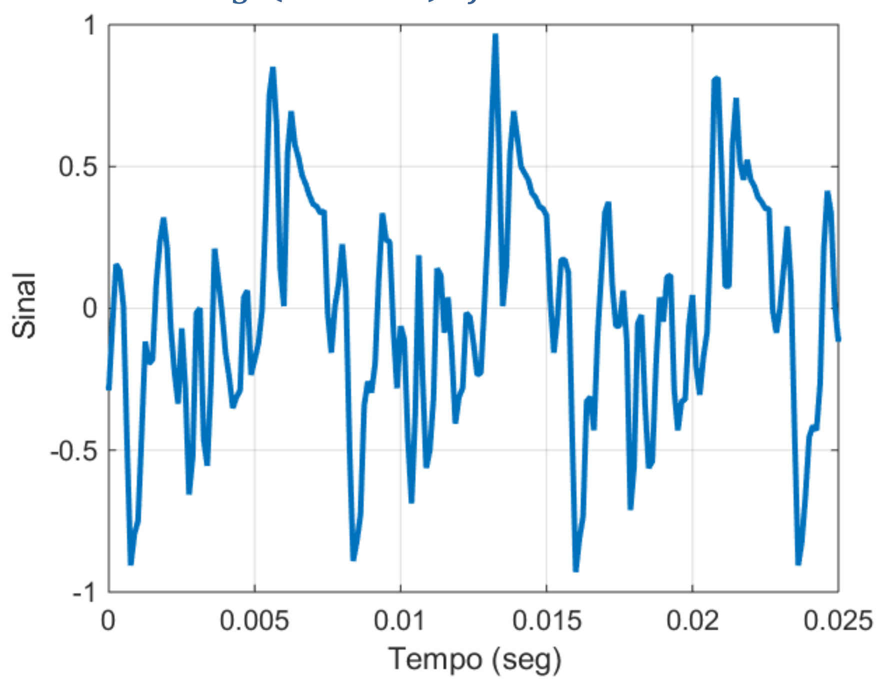
2. Sinal Sinusoidal

Exemplos associados a som:

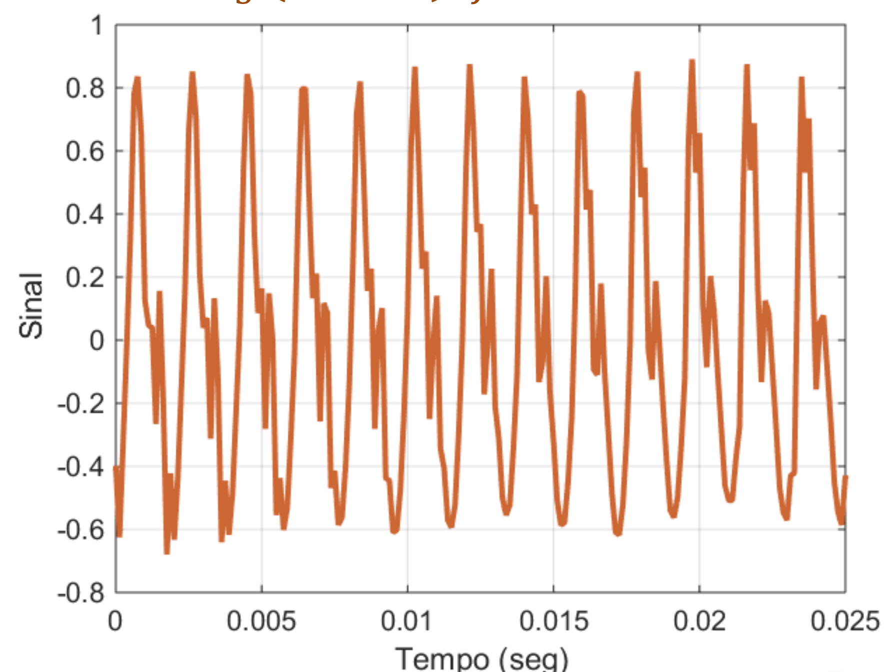


- As mesmas notas geradas por um piano.
- Porque diferem do sinal sinusoidal?

$C_3\ (n = 28): f = 130.8\ Hz$

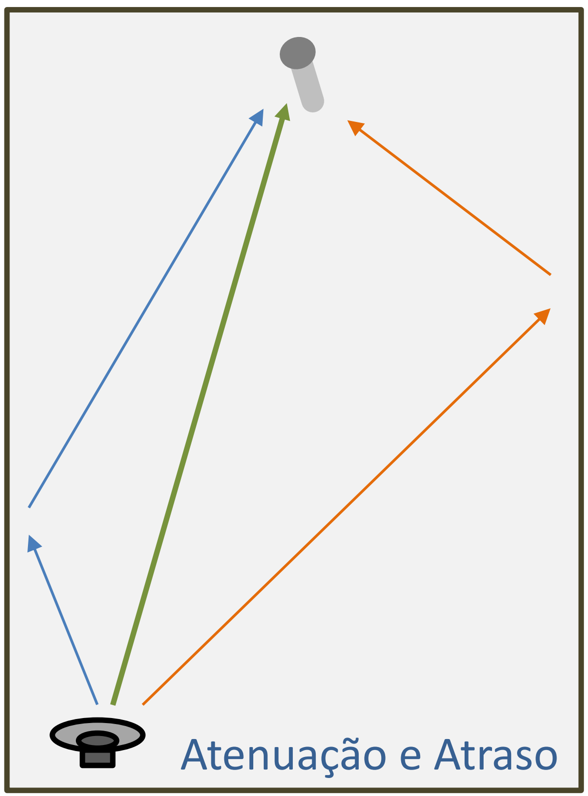


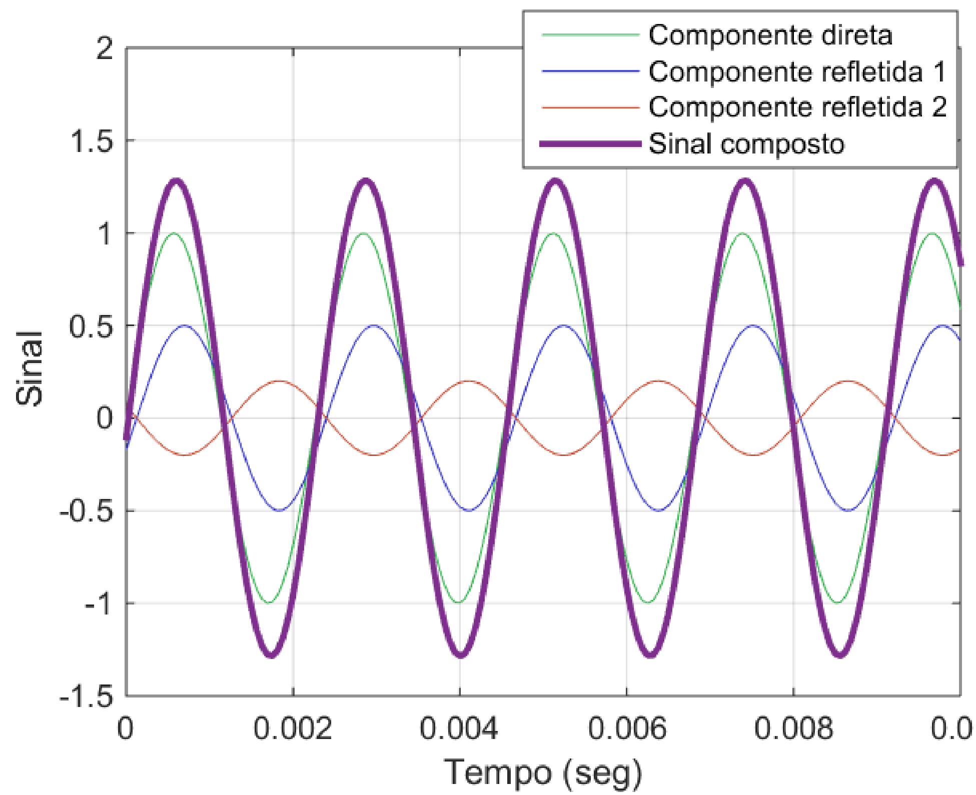
$C_5\ (n = 52): f = 523.3\ Hz$



3. Composição de Sinais Sinusoidais – Parte I

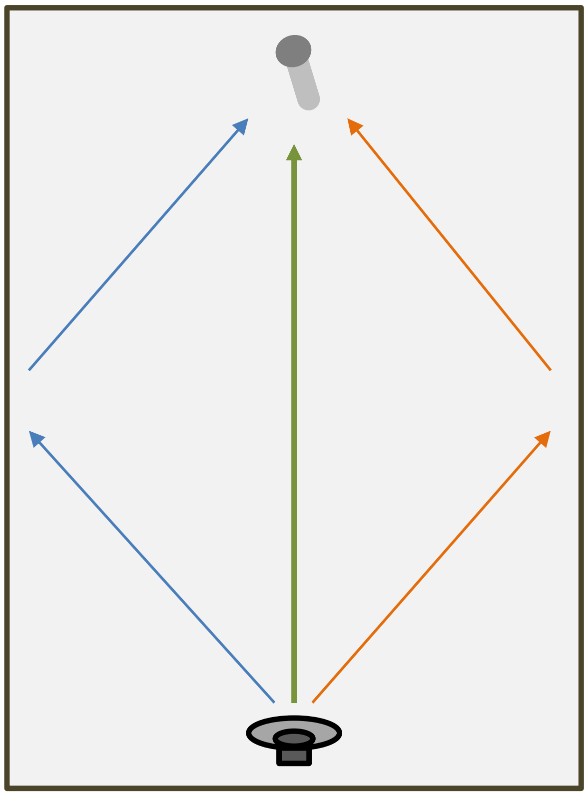
- Em cenários reais, os sinais contemplam combinações de múltiplas sinusoides.
- Exemplo: Som num ambiente com múltiplas reflexões:

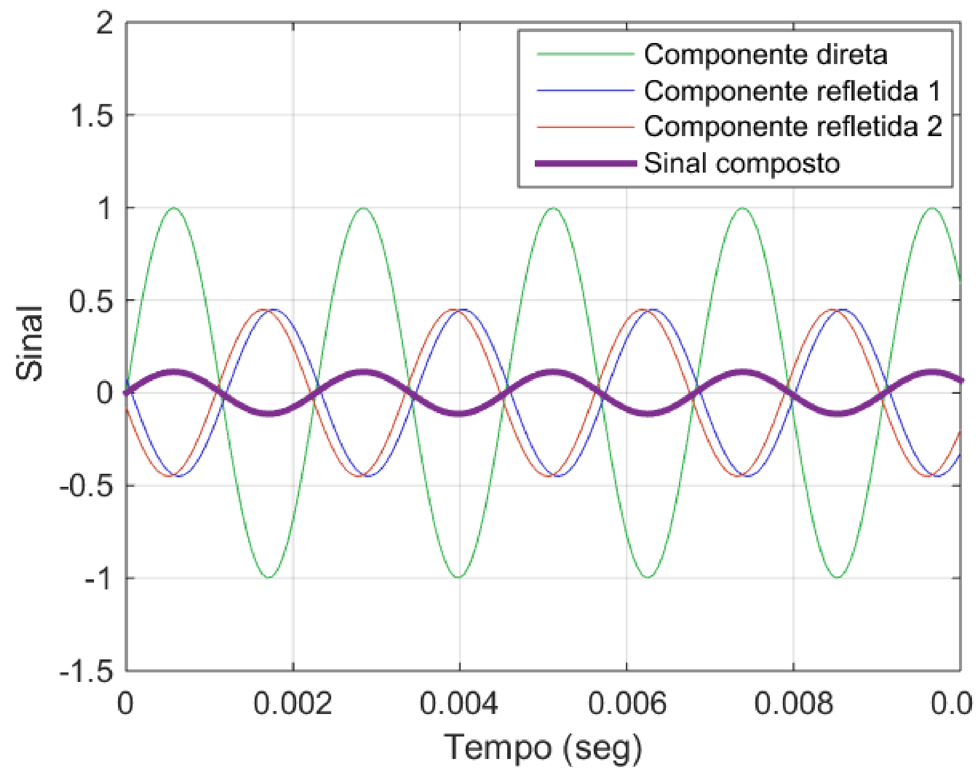




3. Composição de Sinais Sinusoidais – Parte I

- Em cenários reais, os sinais contemplam combinações de múltiplas sinusoides.
- Exemplo: Som num ambiente com múltiplas reflexões:





3. Composição de Sinais Sinusoidais – Parte I

- O somatório de K sinais sinusoidais, todos com a mesma frequência f_0, mas amplitudes A_k e fases ϕ_k possivelmente diferentes, resulta num sinal sinusoidal também com a frequência f_0.

$$y(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k \sin(2\pi f_0 t + \phi_k) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

- A amplitude A e a fase ϕ do sinal resultante dependem ambas das amplitudes A_k e fases ϕ_k.

- Mas como se pode determinar esses parâmetros, de forma simples e sistematizada?

4. Sinusoides e os Números Complexos

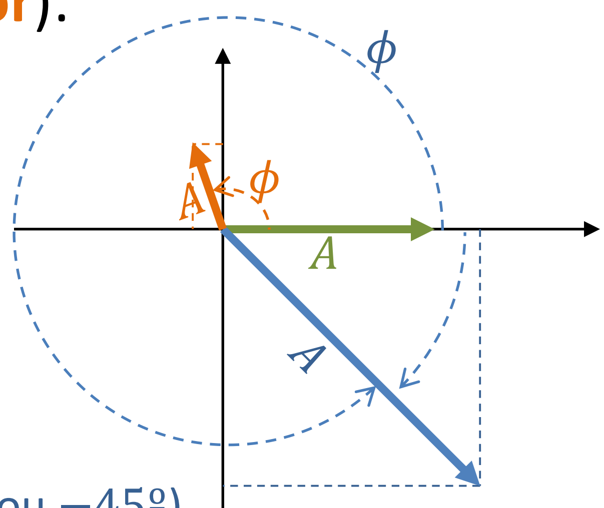
- A representação de sinais sinusoidais através de números complexos visa simplificar e sistematizar a análise e o processamento desses sinais.

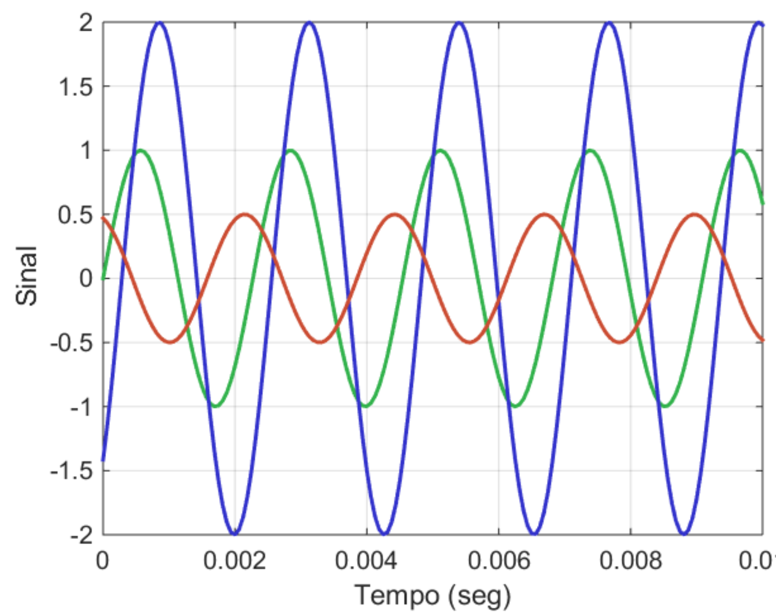
- Sendo várias sinusoides, com a mesma frequência f_0 , caracterizadas pelos parâmetros amplitude e fase, estas podem ser conceptualmente representadas por um vetor (denominado **Fasor**):

$A = 1$
$\phi = 0º$

$A = 0.5$
$\phi = 110º$

$A = 2$
$\phi = 315º$ (ou $-45º$)

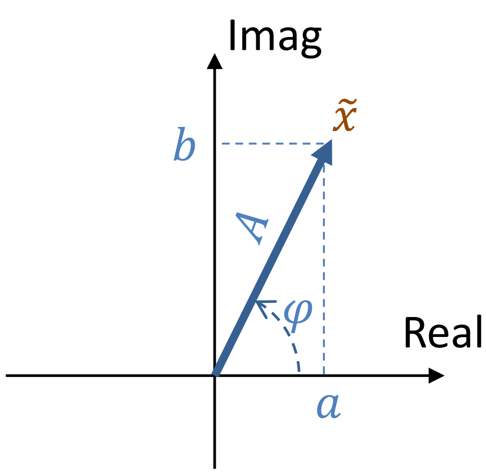




4. Sinusoides e os Números Complexos

- Fasores (sendo vetores) podem ser representados por números complexos.
- Torna-se útil aproveitar as operações associadas aos números complexos para efetuar operações com sinusoides.
- Para tal, é adequado referir a fase ao cos(·), em vez do sin(·).

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$$\tilde{x} = Ae^{j\varphi} = a + jb$$

$$x(t) = Re\{\tilde{x}e^{j\omega_0 t}\} = Re\{Ae^{j\varphi}e^{j\omega_0 t}\} = Re\{Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}\}$$

$$= Re\{A\cos(\omega_0 t + \varphi) + jA\sin(\omega_0 t + \varphi)\}$$

4. Sinusoides e os Números Complexos

- Relembrando algumas relações envolvendo números complexos:

Representação Cartesiana

Representação Polar

$$\boldsymbol{y = \underline{a + jb} = \underline{Ae^{j\varphi}}}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\varphi = \mathrm{atan}(b/a)$$
$$a = A\cos(\varphi)$$
$$b = A\sin(\varphi)$$

- Soma e subtração:

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Multiplicação:

$$\left(A_1 e^{j\varphi_1}\right)\left(A_2 e^{j\varphi_2}\right) = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

- Conjugado:

$$(a + jb)^* = a - jb \qquad \left(Ae^{j\varphi}\right)^* = Ae^{-j\varphi}$$

4. Sinusoides e os Números Complexos

- Relembrando algumas relações envolvendo números complexos:

Representação Cartesiana

Representação Polar

$$\boldsymbol{y = \underbrace{a + jb}_{\text{Representação Cartesiana}} = \underbrace{Ae^{j\varphi}}_{\text{Representação Polar}}}$$

- Multiplicação pelo conjugado:

$$yy^* = \left(Ae^{j\varphi}\right)\left(Ae^{j\varphi}\right)^* = A^2 = a^2 + b^2$$

- Divisão:

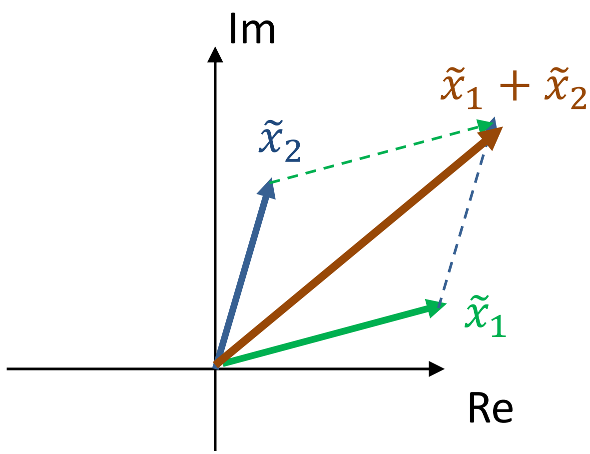
$$\left(A_1 e^{j\varphi_1}\right)/\left(A_2 e^{j\varphi_2}\right) = (A_1/A_2)e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad \frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$

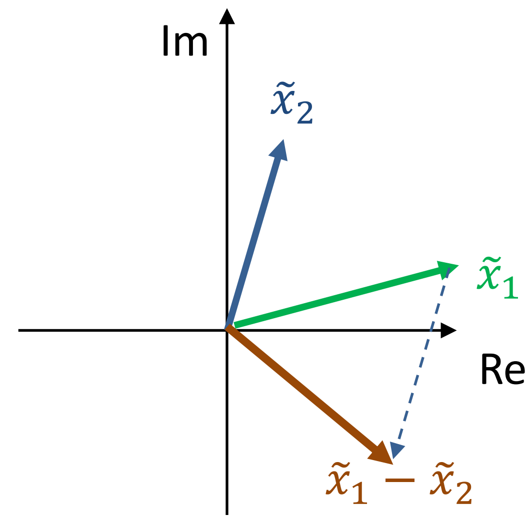
- Relação (fórmula) de Euler:

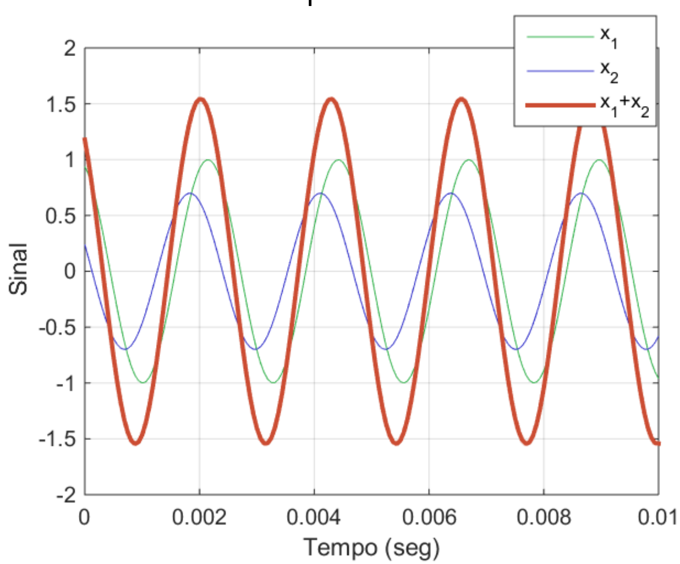
$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

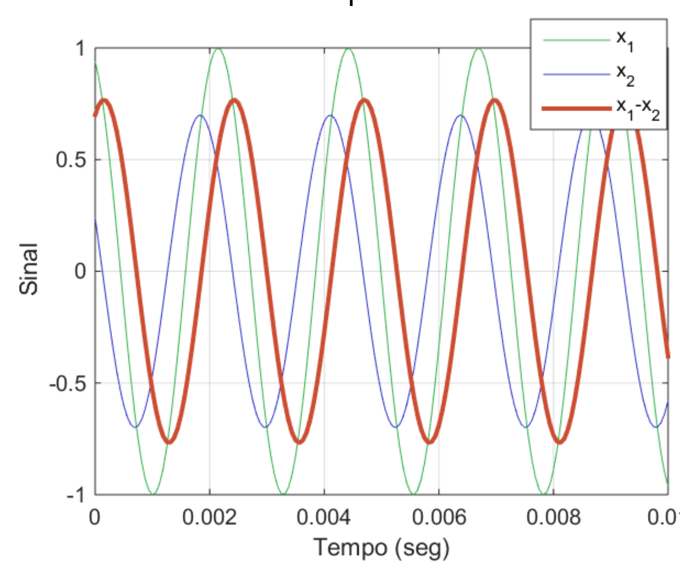
4. Sinusoides e os Números Complexos

- A adição de sinusoides de igual frequência f_0 pode ser vista através da soma dos respetivos fasores:



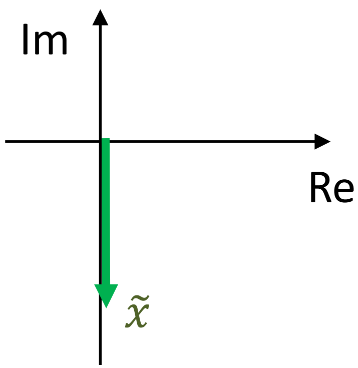


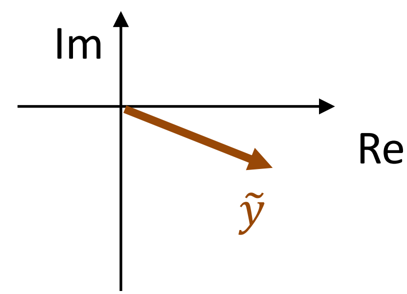




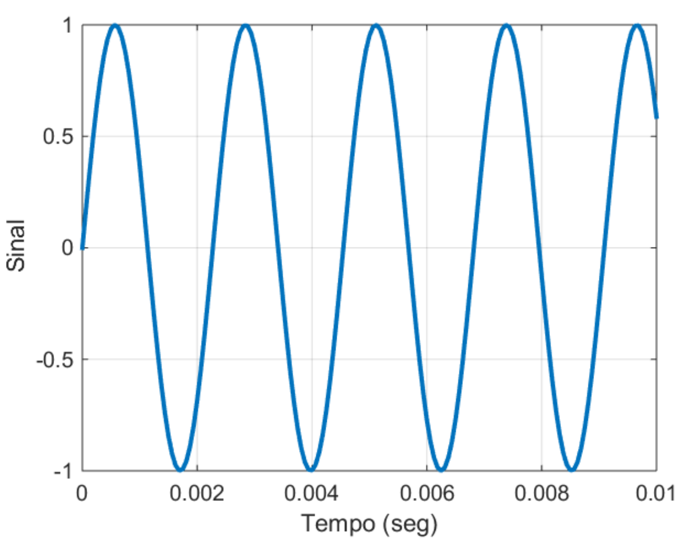
4. Sinusoides e os Números Complexos

- A resposta sinusoidal de um processo linear pode ser facilmente analisada pela alteração de amplitude e de fase que tal processo introduz:

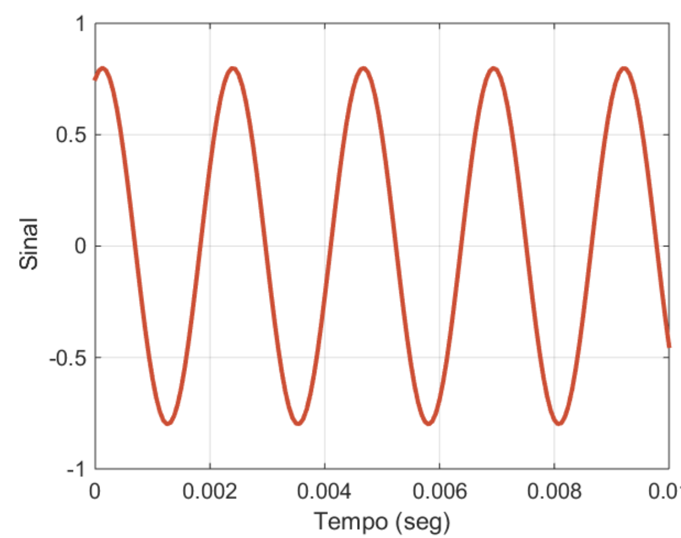




$$\tilde{y} = \left(Ge^{j\delta}\right)\tilde{x} = (GA)e^{j(\varphi+\delta)}$$



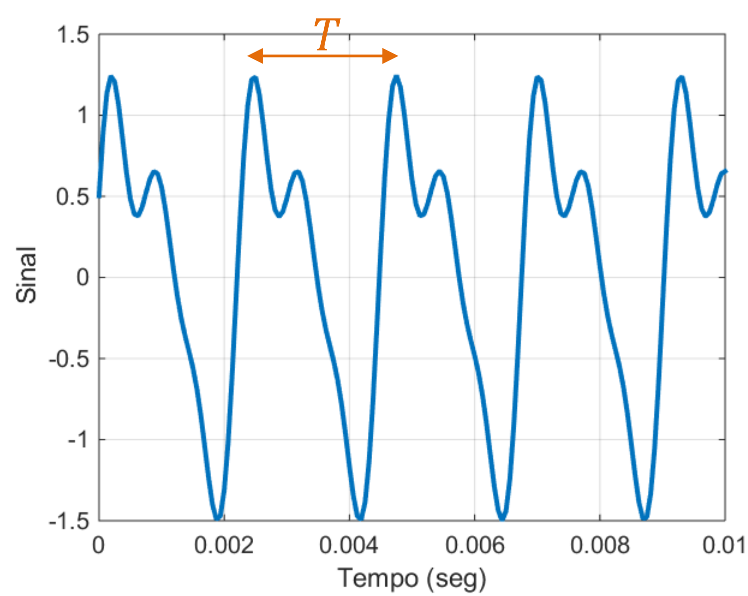
$$G = 0.8$$
$$\delta = 70º$$



5. Decomposição em Série de Sinusoides

- Como um processo linear mantém separadamente o comportamento a cada frequência, torna-se muito adequado decompor os sinais num somatório de componentes sinusoidais.

- Tal decomposição é muito simples para o caso de sinais periódicos (sinais cuja forma se repete regularmente ao longo do tempo).

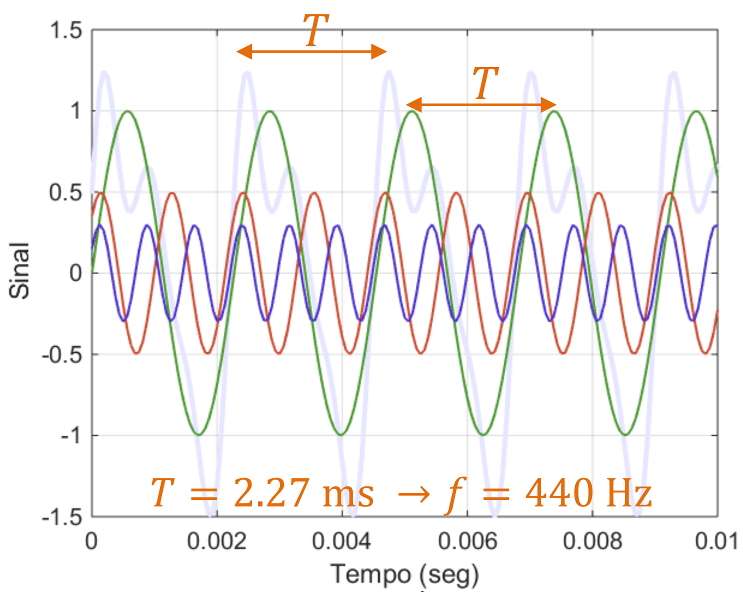


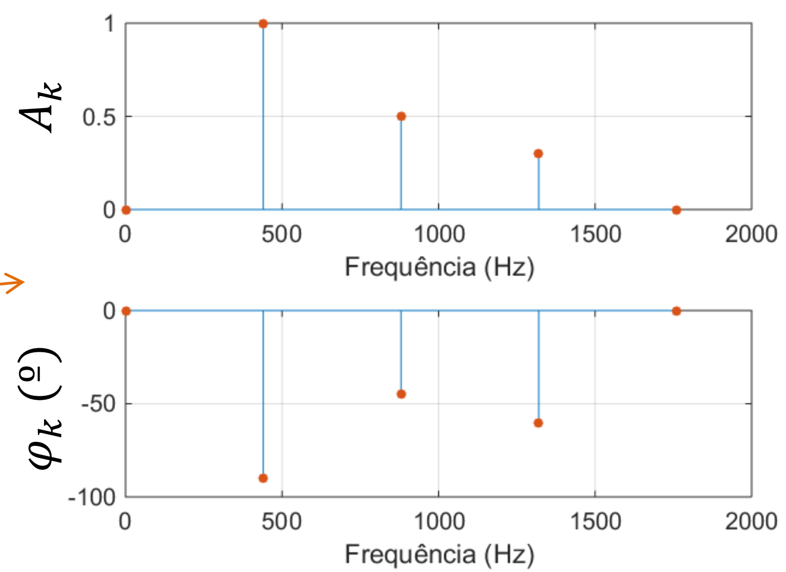
5. Decomposição em Série de Sinusoides

- Um sinal periódico, de período T, pode ser descrito por um somatório de sinusoides de frequências múltiplas de $f = 1/T$ (incluindo a componente constante).

Harmónicos

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K} A_k \cos(2\pi k f t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{K} A_k \sin(2\pi k f t + \phi_k)$$





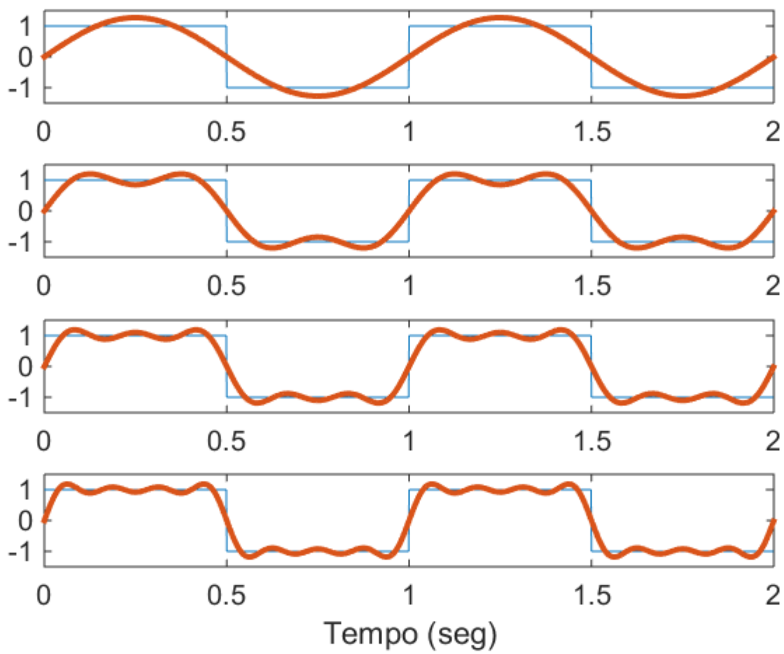
5. Decomposição em Série de Sinusoides

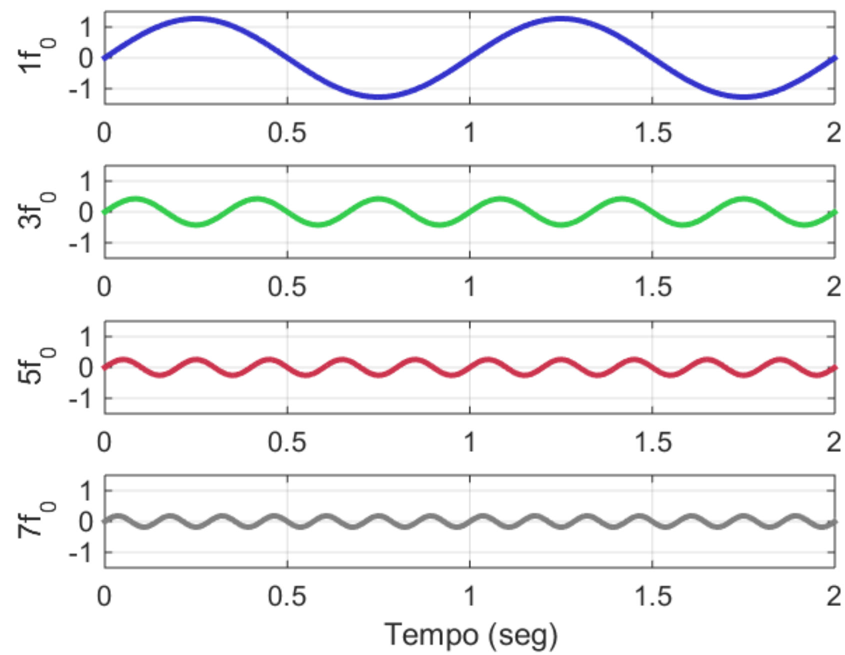
Jean-Baptiste Joseph Fourier
1768 - 1830

- Esta representação é conhecida por Série de Fourier.
- Também pode ser descrita por:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(2\pi k f t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2\pi k f t)$$

Exemplo (onda quadrada):





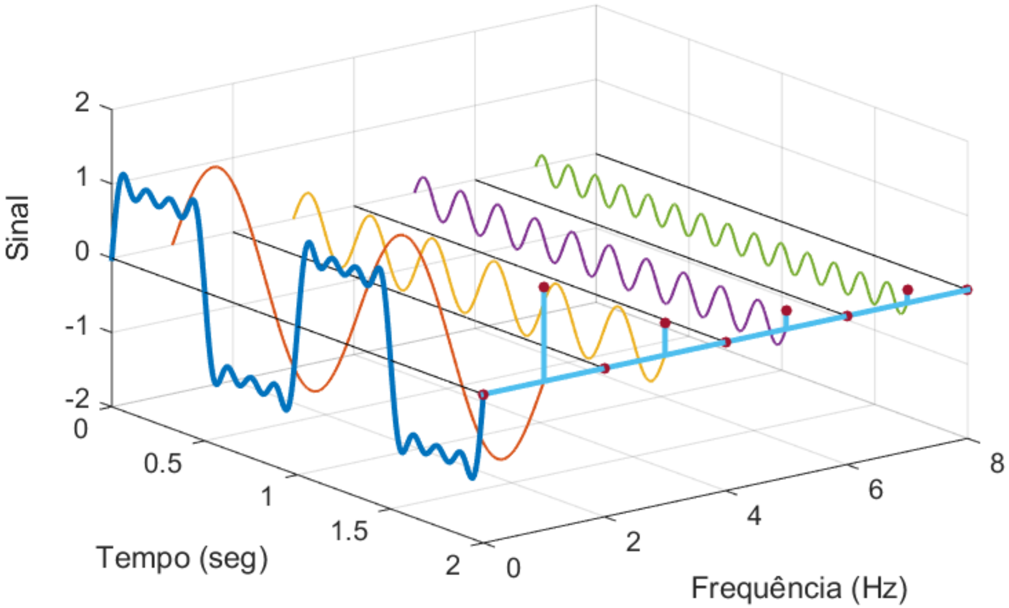
5. Decomposição em Série de Sinusoides

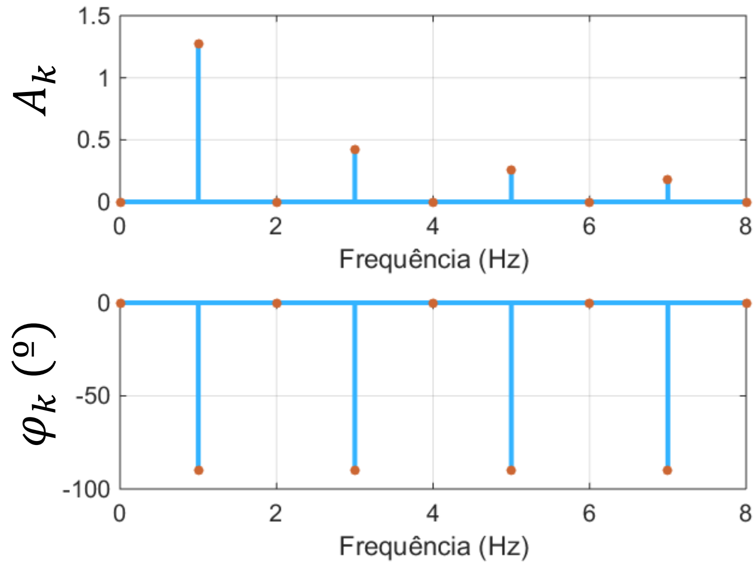
- Esta representação é conhecida por Série de Fourier.
- Também pode ser descrita por:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(2\pi k f t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2\pi k f t)$$

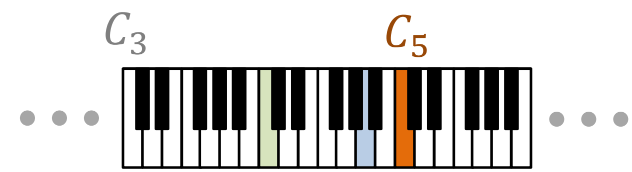
Jean-Baptiste Joseph Fourier
1768 - 1830

Exemplo (onda quadrada):



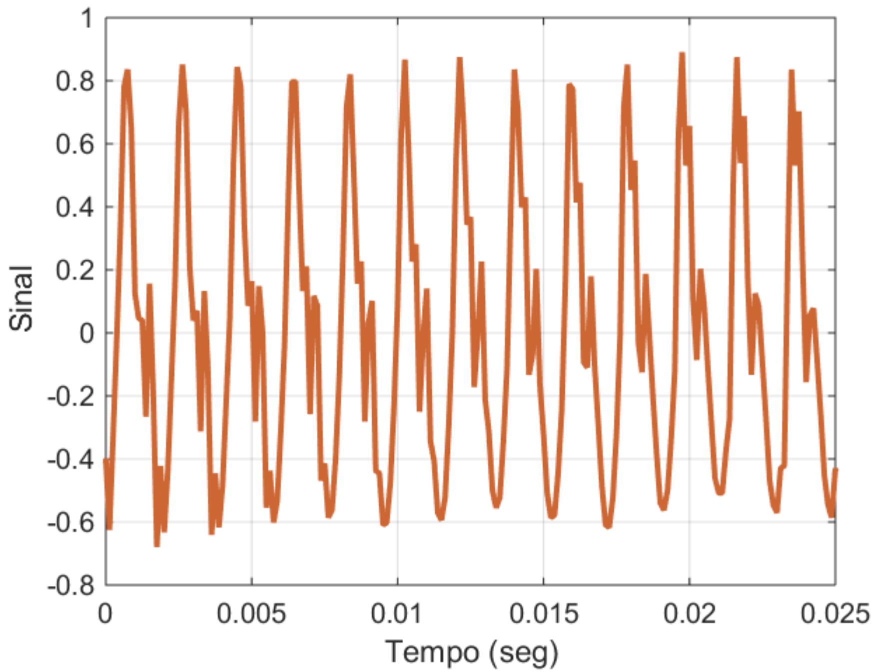


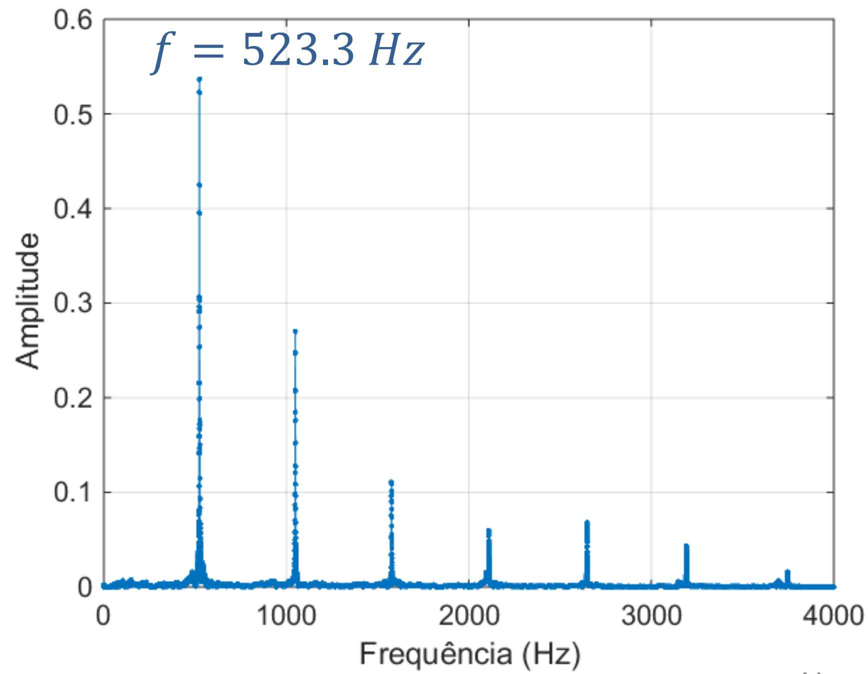
5. Decomposição em Série de Sinusoides



Exemplo (nota de piano):

$C_5\ (n = 52)$: $f = 523.3\ Hz$





6. Composição de Sinusoides – Parte II

- Considere-se, agora, o caso em que um sinal é constituído por um somatório de sinusoides não harmonicamente relacionadas:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

- Este sinal é também um sinal periódico se todas as frequências forem múltiplos inteiros de uma frequência comum, f_0 (sendo esta a frequência do sinal composto):

$$f_0 = mdc(f_1, f_2, \dots, f_K)$$

- Se não houver um máximo divisor comum de todas as frequências, o sinal composto não é periódico.

6. Composição de Sinusoides – Parte II

Exemplo: Sinal de dois tons

$f_1 = 1\ Hz$

$$x_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)$$

$f_2 = 5/6\ Hz$

$$x_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_2}t\right)$$

$f_o = 1/6\ Hz$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$