Licenciatura em Engenharia Informática

Sistemas Multimédia

Série e Transformada de Fourier

e Espetro de Sinais

Telmo Reis Cunha

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro – 2020/2021

1. Série e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Mostrou-se que um sinal periódico (de período T) pode ser decomposto numa série de senos e/ou cossenos, de frequências múltiplas de $f = 1/T$, denominada **Série de Fourier**:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(2\pi k f t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2\pi k f t) = \sum_{k=0}^{K} A_k \cos(2\pi k f t + \varphi_k)$$

- Os coeficientes da série podem ser determinados por:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi k f t)\,dt\,; \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi k f t)\,dt\,; \qquad \forall_{k>0}$$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$ (Valor médio do sinal) $\qquad b_0 = 0$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \qquad \varphi_k = -atan2\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

1. Série e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Contudo, na maior parte dos casos, os sinais encontram-se discretizados no tempo (não são sinais contínuos).
- A Série de Fourier toma, neste caso, a seguinte forma:

$$x(\boldsymbol{n}) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(2\pi k f \boldsymbol{n}\boldsymbol{T_a}) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2\pi k f \boldsymbol{n}\boldsymbol{T_a}) = \sum_{k=0}^{K} A_k \cos(2\pi k f \boldsymbol{n}\boldsymbol{T_a} + \varphi_k)$$

$n = 0,1,2, \dots, N$

- E os coeficientes desta série podem ser determinados por:

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)\cos(2\pi k f n T_a)\,; \quad b_k = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)\sin(2\pi k f n T_a)\,; \qquad \forall_{k>0}$$

$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)$ (Valor médio do sinal) $b_0 = 0$ $N = \frac{T}{T_a}$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \qquad \varphi_k = -atan2\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

1. Série e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Considere-se a aplicação da fórmula de Euler à Série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K} A_k \cos(2\pi k f t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{K} A_k \frac{e^{j(2\pi k f t + \varphi_k)} + e^{-j(2\pi k f t + \varphi_k)}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K} A_k e^{j\varphi_k} e^{j2\pi k f t} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K} A_k e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi k f t}$$

- Esta expressão pode ser condensada na seguinte forma:

$$x(t) = \sum_{k=-K}^{K} C_k e^{j2\pi k f t} \quad , \quad C_k \in \mathbb{C}$$

- Esta é conhecida por **Série Exponencial de Fourier**.

1. Série e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

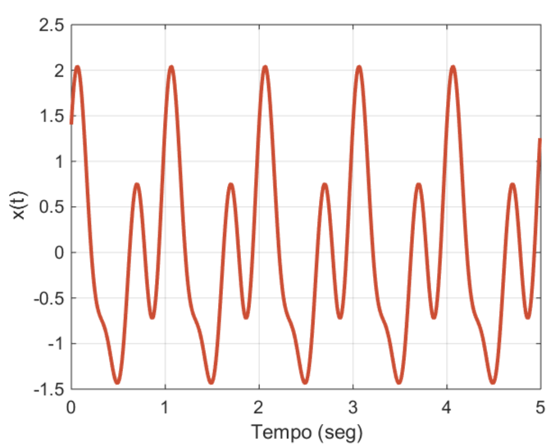
- Esta representação introduz o conceito de frequências "positivas" e "negativas":

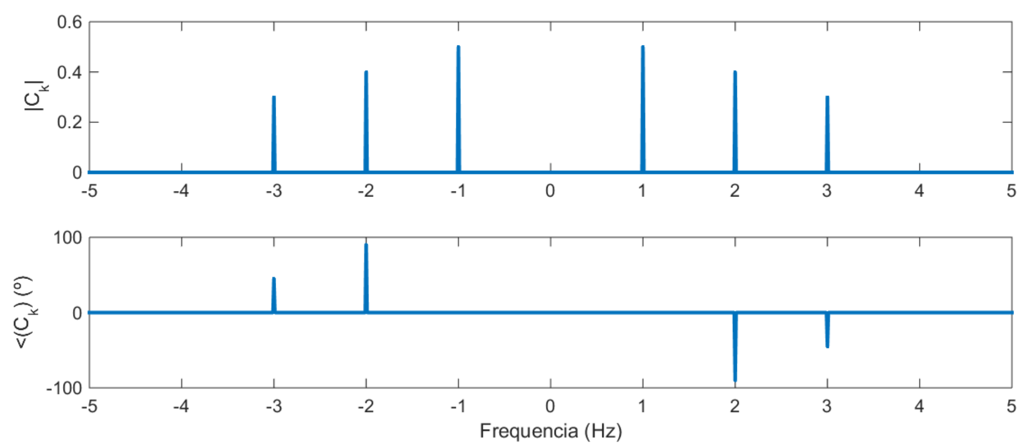
$$x(t) = \sum_{k=-K}^{K} C_k e^{j2\pi k f t}$$

Para sinais reais verifica-se a relação: $C_k = C_k^*$

- Esta representação fez surgir o conceito de **Espetro** de um sinal (i.e., o seu conteúdo ao longo da frequência).

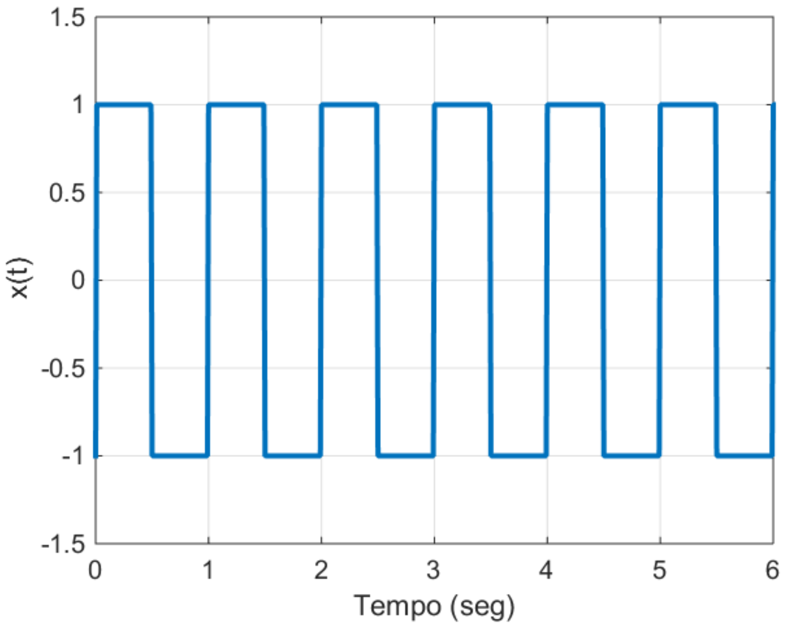
Exemplo: $x(t) = \cos(2\pi t) + 0.8\sin(4\pi t) + 0.6\cos(6\pi t - \pi/4)$

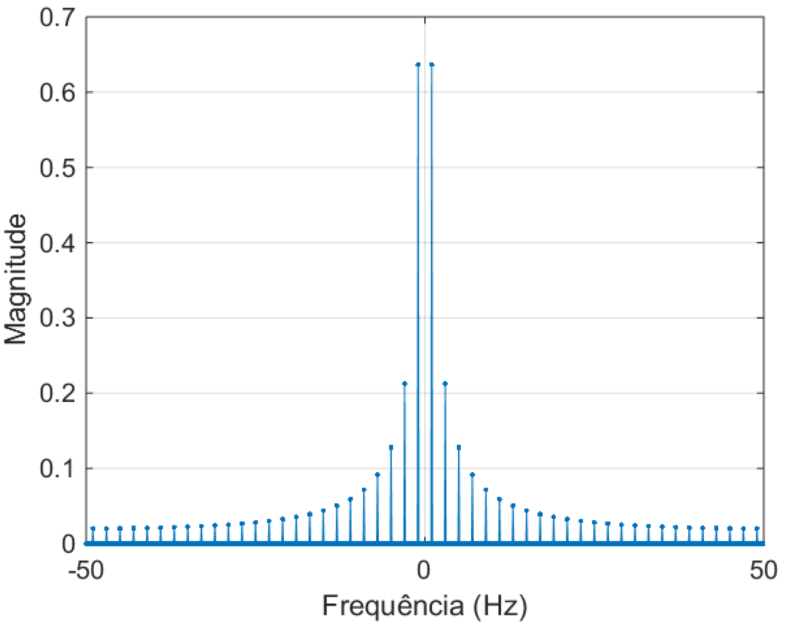




2. Exemplos da Aplicação da DFT

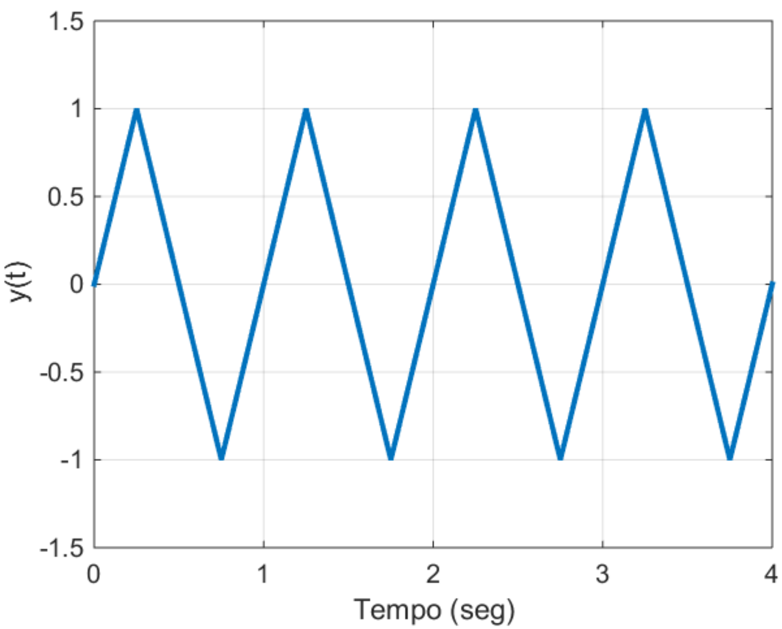
- Onda quadrada:

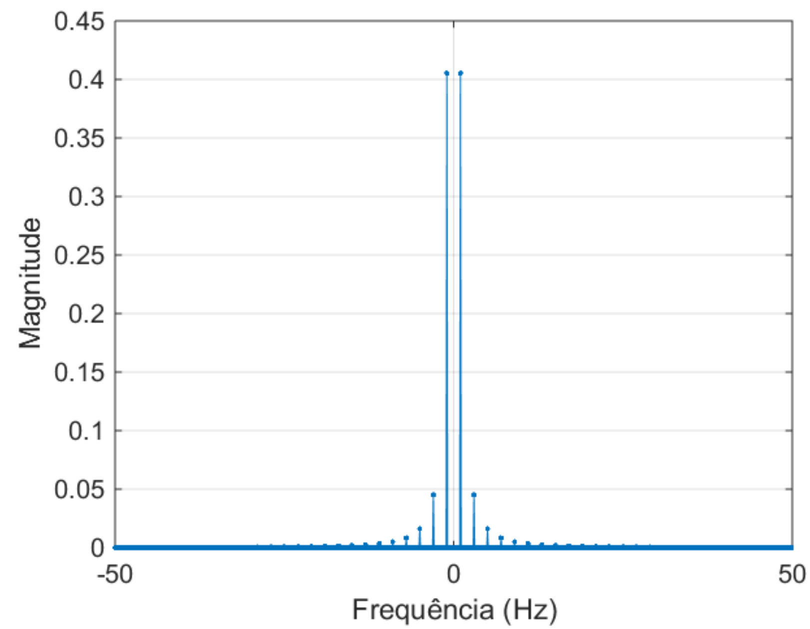




2. Exemplos da Aplicação da DFT

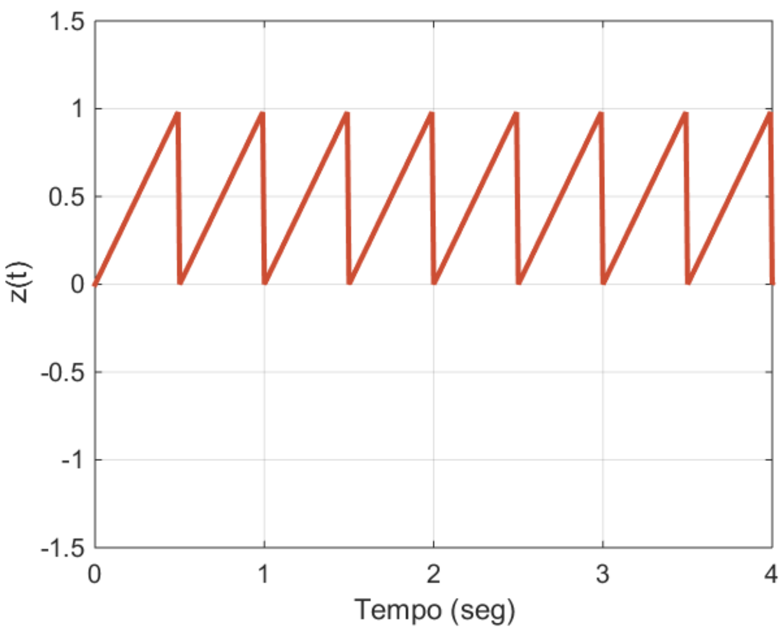
- Onda triangular:

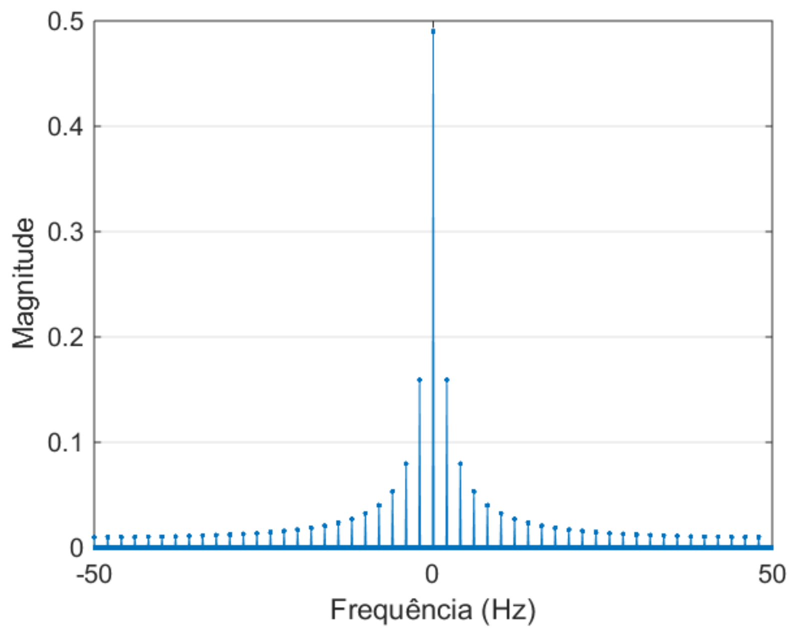




2. Exemplos da Aplicação da DFT

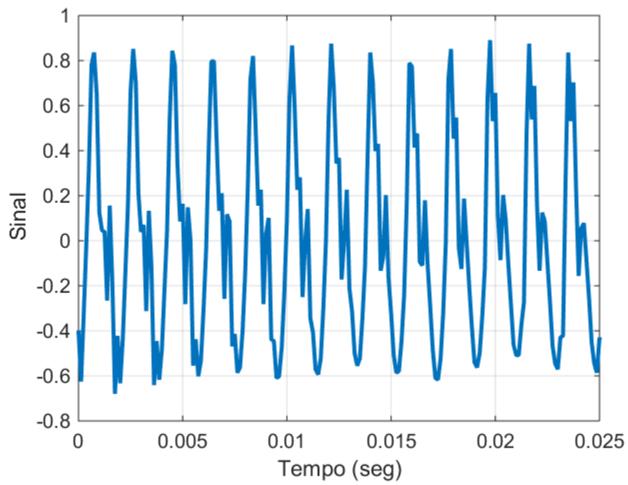
- Onda dente-de-serra:

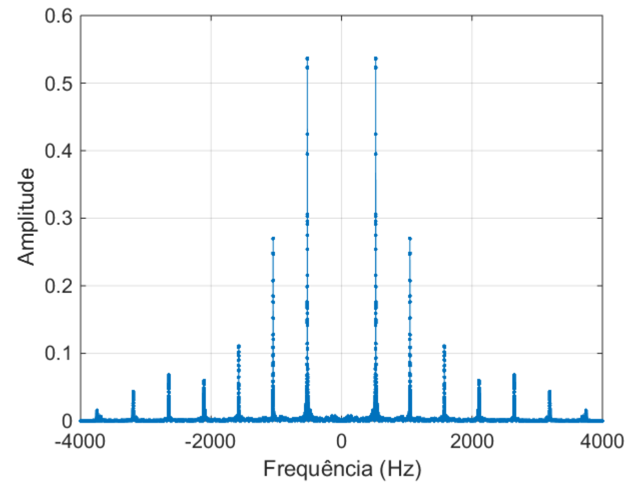




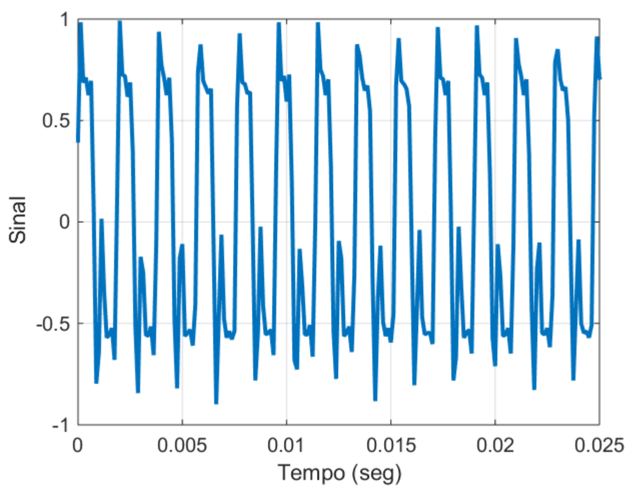
2. Exemplos da Aplicação da DFT

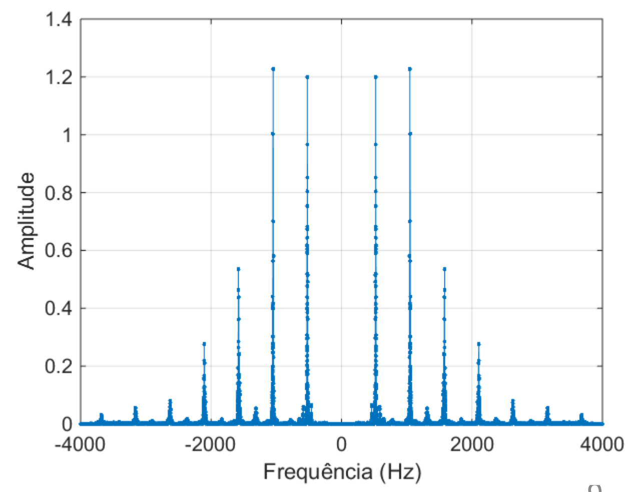
- Piano C5:





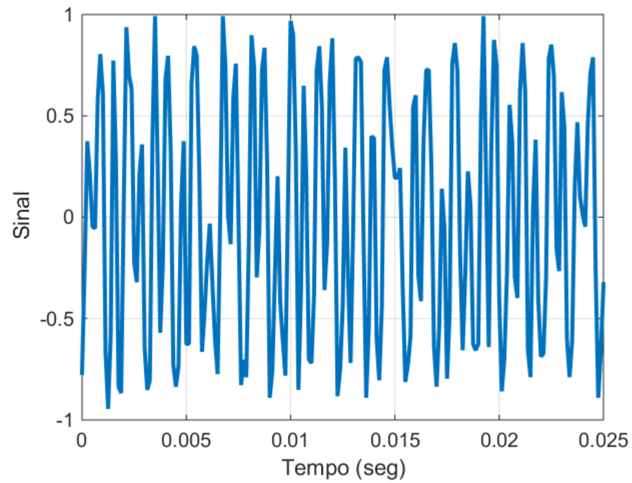
- Flauta C5:

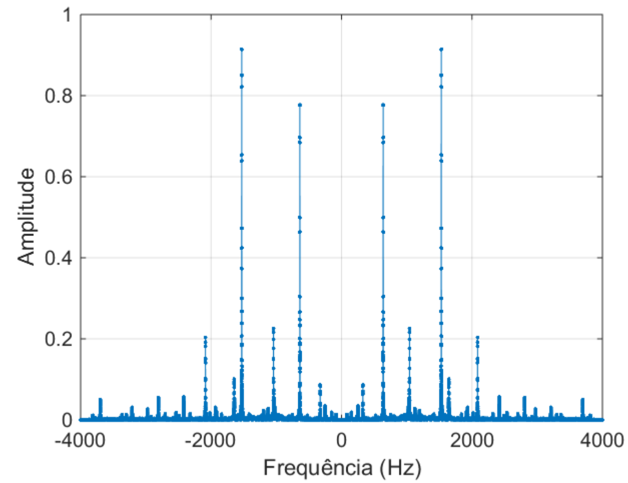




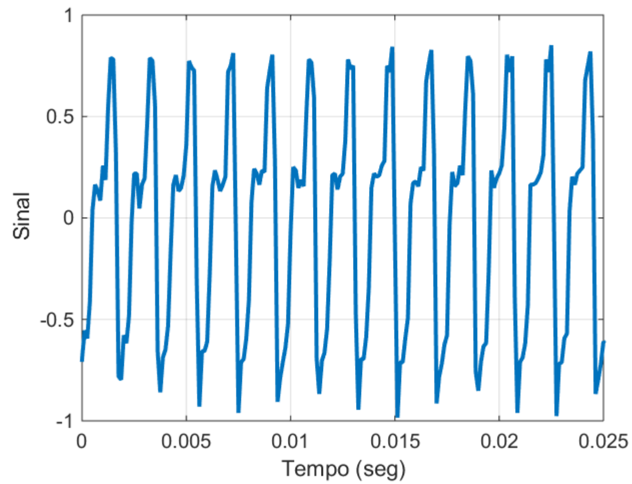
2. Exemplos da Aplicação da DFT

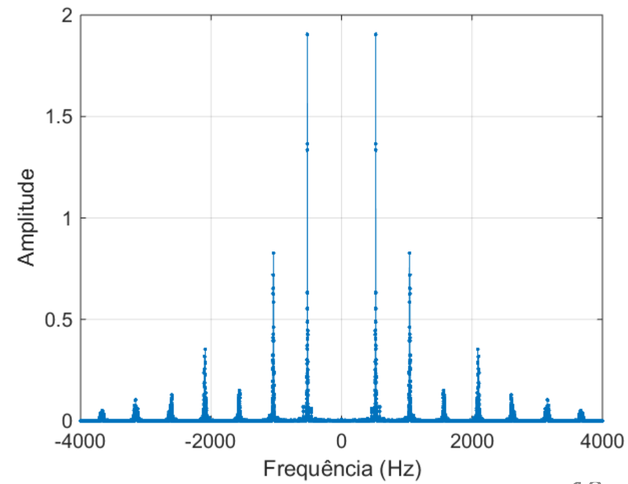
- Sino C5:





- Violino C5:



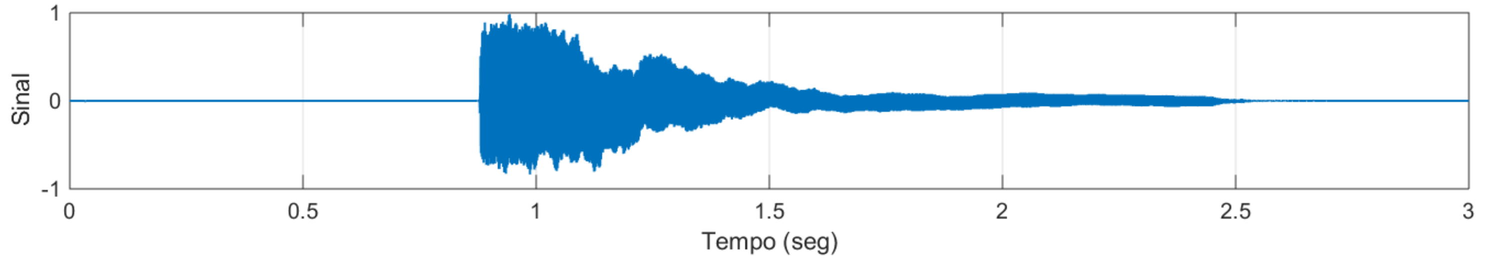


3. DFT em Sinais Não Periódicos

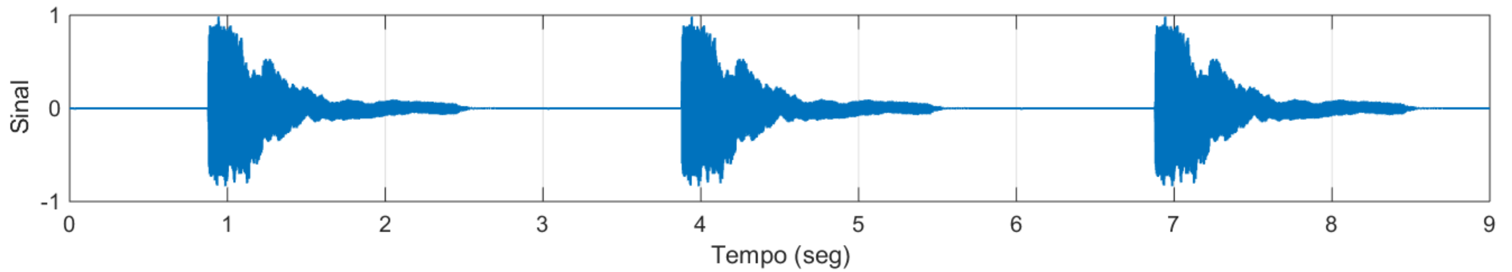
- A DFT foi definida para sinais periódicos.
- Mas como poderá ser analisado o espetro de sinais não periódicos (como os recebidos numa sequência de áudio)?
- Tal pode ser conseguido forçando o sinal recolhido a ser considerado como periódico.
- Existem várias técnicas para este efeito, sendo a mais usada a de *windowing*.

3. DFT em Sinais Não Periódicos

- Por exemplo, considere-se o registo do som produzido por se carregar numa tecla C5 de um piano:



- Para fins de análise do seu espetro, este sinal pode ser entendido como replicado vezes sem conta ao longo do tempo:

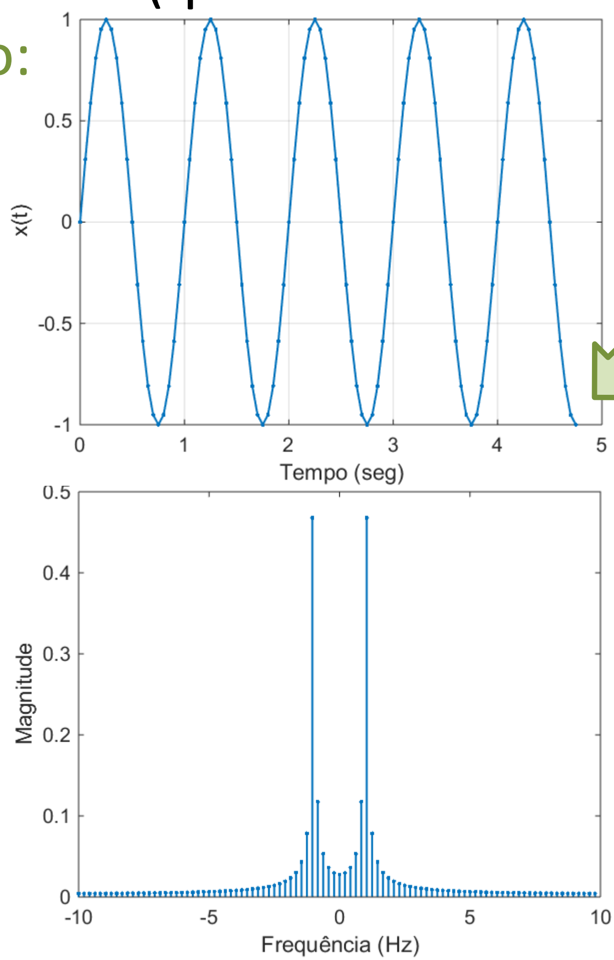


- Então, a DFT pode ser aplicada a uma sequência de amostras, ficando implícita a repetição dessa sequência indefinidamente.

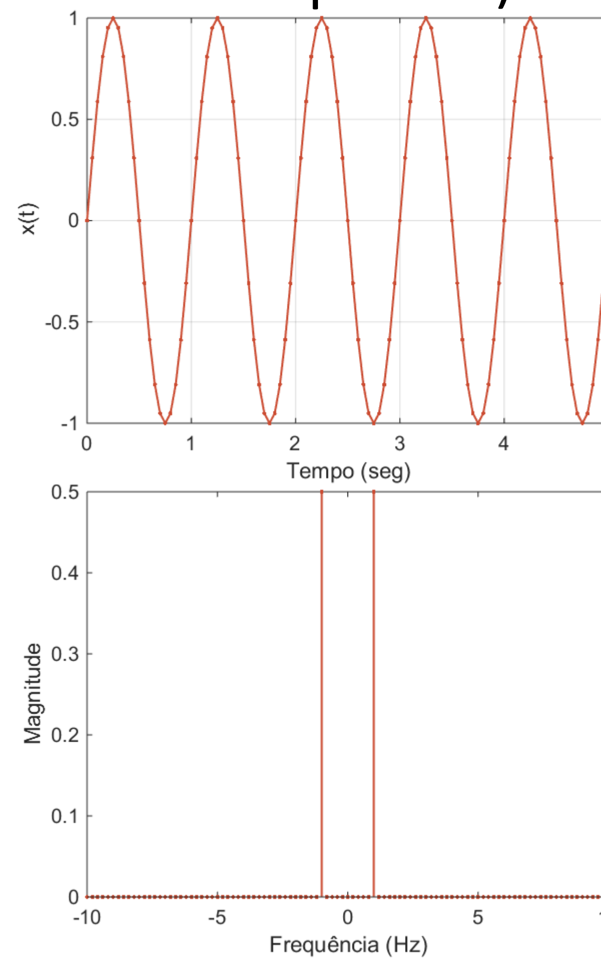
3. DFT em Sinais Não Periódicos

- A técnica de *windowing* aplica-se quando a parte inicial da sequência de amostras recolhida não apresenta a continuidade da parte final (quando se concatenam réplicas dessa sequência).

Exemplo:

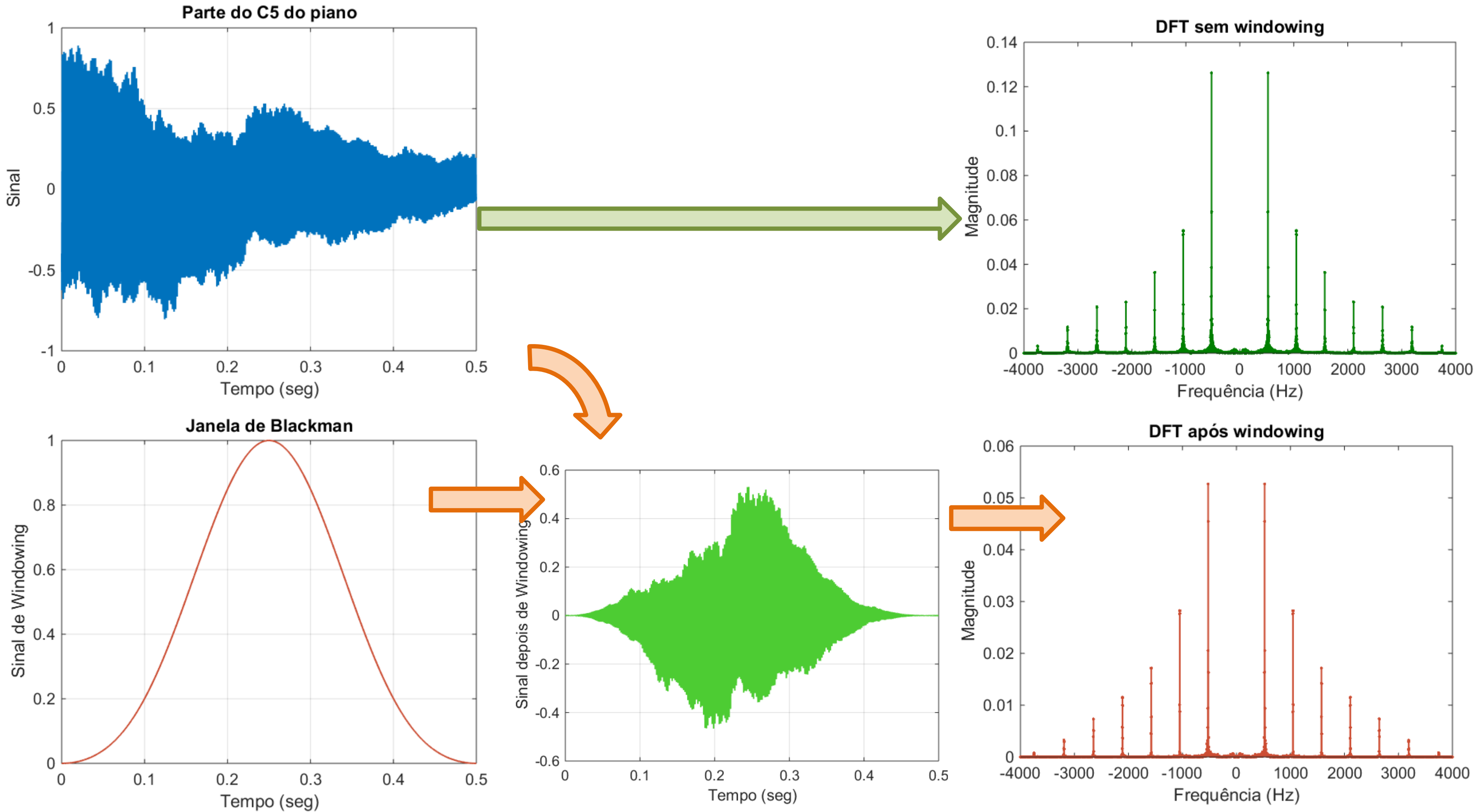


Termina muito cedo...



3. DFT em Sinais Não Periódicos

- A técnica de *windowing* consiste em multiplicar a sequência não "circular" por uma "janela" que força a forma periódica.



3. DFT em Sinais Não Periódicos

- O algoritmo **FFT** (***Fast Fourier Transform***) implementa a DFT de uma forma muito eficiente.

- Seja $\mathbf{x}$ um vetor de N amostras consecutivas de um sinal, com período de amostragem T_a.

- $\gg \mathbf{X} = fft(\mathbf{x})/N;$

- O vetor $\mathbf{X}$ tem também N elementos: um coeficiente ($C_k \in \mathbb{C}$) para cada frequência da decomposição.

- O vetor de frequências (em Hz) correspondente a $\mathbf{X}$ é:

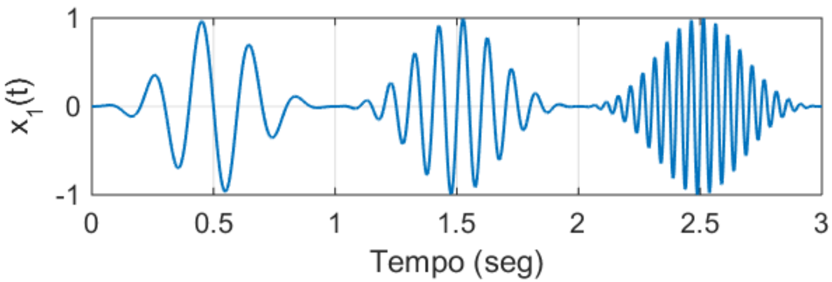
- $\gg f = [0 : df : (N-1) * df];$

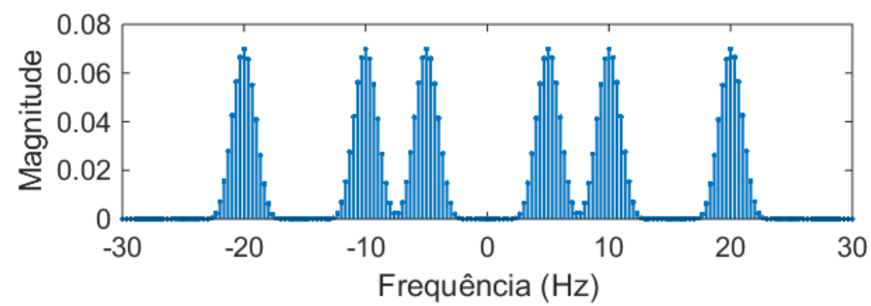
Usar **fftshift(X)** para ordenar de $-f_a/2$ a $+f_a/2$.

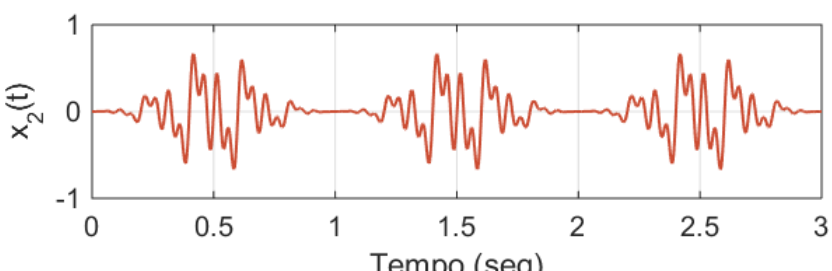
4. Espetrograma

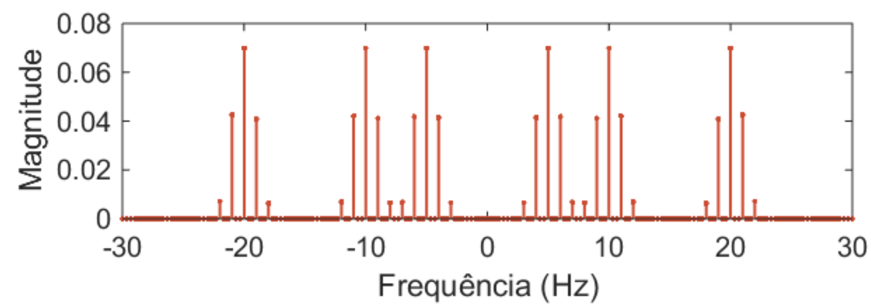
- Em sinais áudio, por exemplo, é por vezes relevante estudar a evolução do conteúdo em frequência (espetro) ao longo do tempo.

- Por exemplo, uma sequência de tons diferentes tem um espetro idêntico ao dos mesmos tons considerados em simultâneo:



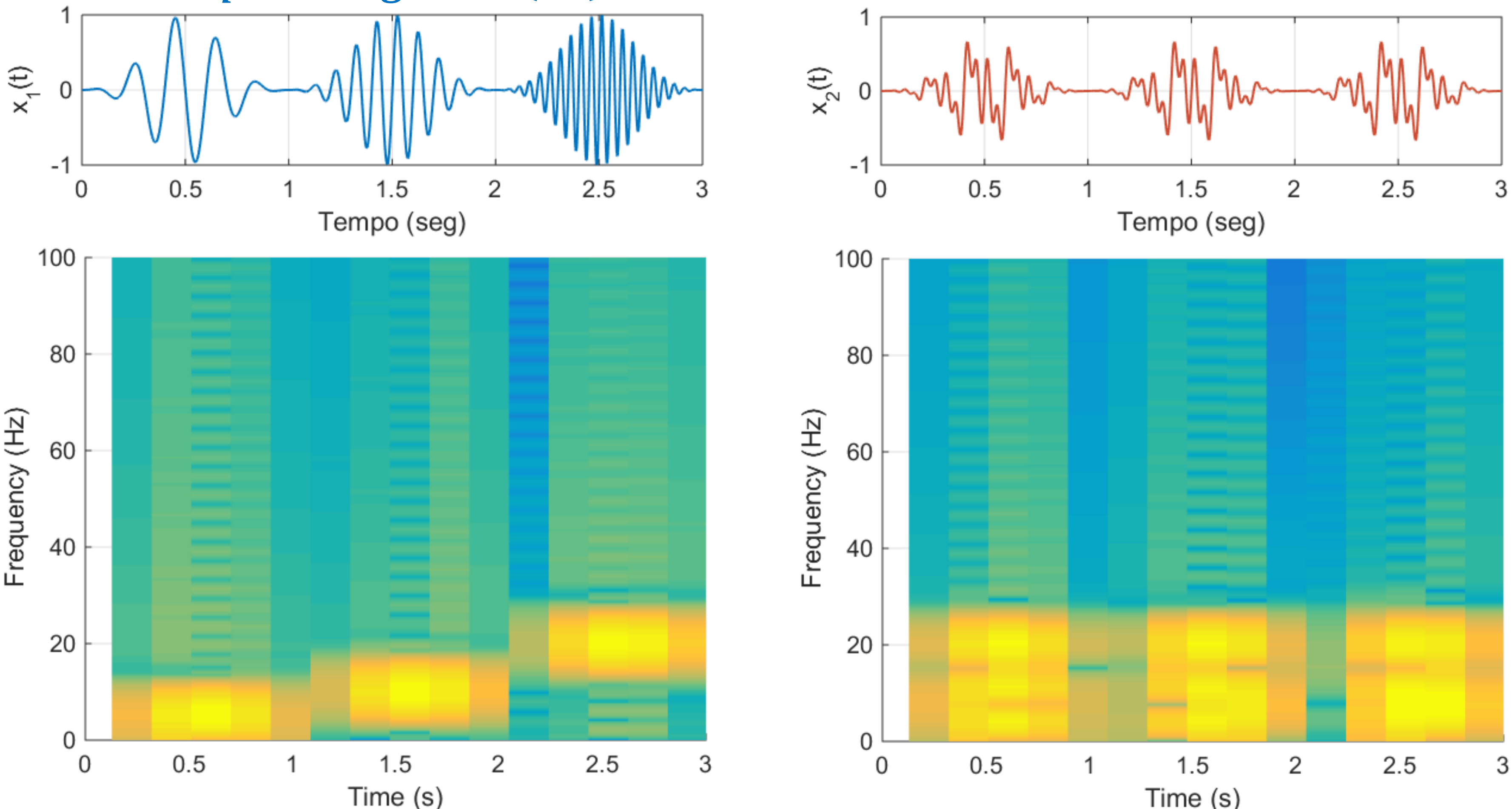






4. Espetrograma

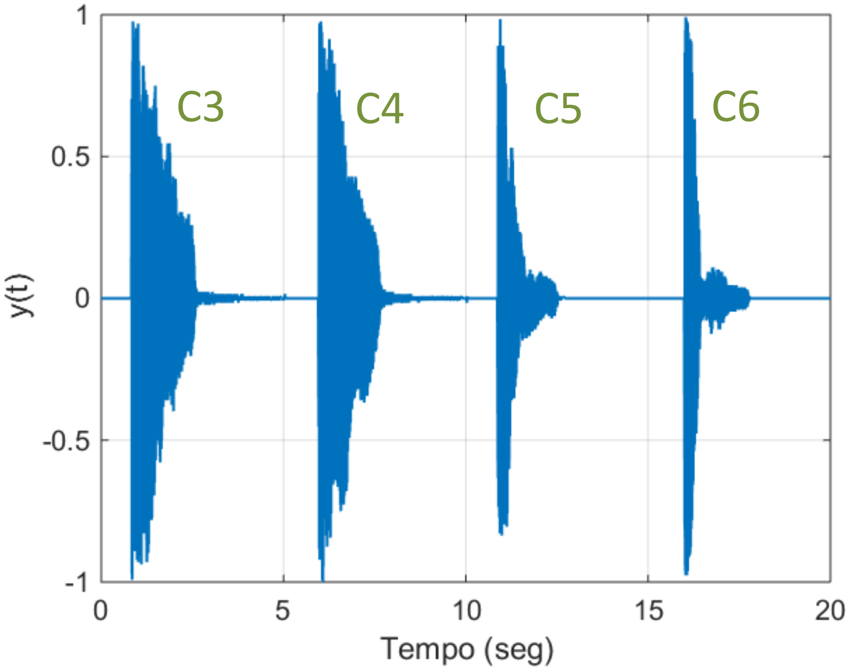
- Nestes casos, é usual considerar-se a *short-time* FFT, cujo resultado é conhecido por **Espetrograma**.
- $\gg spectrogram(\dots);$



4. Espetrograma

- Nestes casos, é usual considerar-se a *short-time* FFT, cujo resultado é conhecido por **Espetrograma**.
- $\gg spectrogram(\ldots);$

Sequência de 4 notas de um piano



Espetrograma