Licenciatura em Engenharia Informática

Sistemas Multimédia

Codificação de Informação e Entropia

Telmo Reis Cunha

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro – 2020/2021

1. Codificação de Informação

- A parte relevante de sinais, imagens, textos, etc. é a **Informação** que estes contêm.

- Essa informação deve ser representada num determinado suporte que lhe permita ser armazenada, transmitida, processada, sem que a referida informação se perca.

- Ao processo de representação da informação por **códigos** denomina-se **Codificação**.

- Por exemplo, o guião de "Sistemas Multimédia":
  - guardado num ficheiro de texto, ocupa 3259 bytes;
  - comprimido para um ficheiro .ZIP ocupa 1676 bytes.
- A mesma informação foi armazenada com codificações distintas.

2. Codificação Binária

- Hoje em dia, a informação é processada, armazenada e transmitida usando **codificação binária**.

- Esta codificação admite que o elemento básico de codificação (o **bit**) pode obter dois valores possíveis: 0 ou 1.

- Códigos mais complexos são obtidos agrupando um conjunto de bits.

- Uma codificação de N bits gera, assim, um conjunto de 2^N códigos possíveis.

- Por exemplo, uma codificação de 8 bits (i.e., **1 byte**) dá origem a 256 códigos.

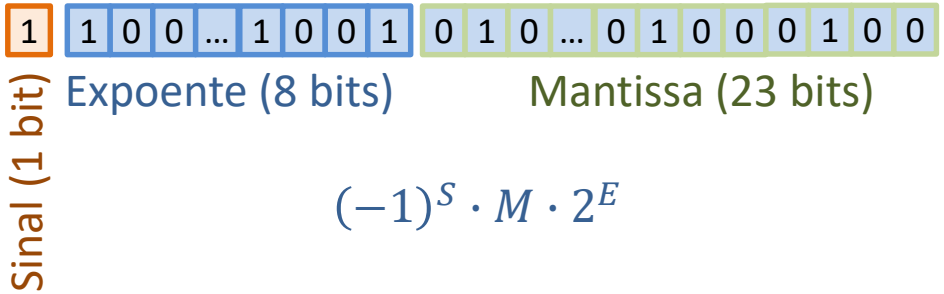
2. Codificação Binária

Binário	Decimal
0 0 0 0 0 0 0 0	0
0 0 0 0 0 0 0 1	1
0 0 0 0 0 0 1 0	2
0 0 0 0 0 0 1 1	3
⋮	⋮
1 1 1 1 1 1 0 0	252
1 1 1 1 1 1 0 1	253
1 1 1 1 1 1 1 0	254
1 1 1 1 1 1 1 1	255

Com 2 bytes (1 **word**) podem-se representar 65536 códigos distintos.

Com 2 words (1 **double word**, ou **dword**) são 4294967296 códigos.

Números reais também podem ser representados por códigos. Exemplo (IEEE 754 *single precision*):



$$(-1)^S \cdot M \cdot 2^E$$

Exemplo:

$$10010101_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 149_{10}$$

Base 2 Base 10

2. Codificação Binária

- Cada código pode ser associado a um **símbolo** do **alfabeto** que compõe as mensagens que são possíveis de realizar.
- Por exemplo, o código ASCII representa os carateres num código de (originalmente) 7 bits.

ASCII – American Standard Code for Information Interchange (1963).

- Com a introdução de mais carateres, o código ASCII usa atualmente 8 bits.

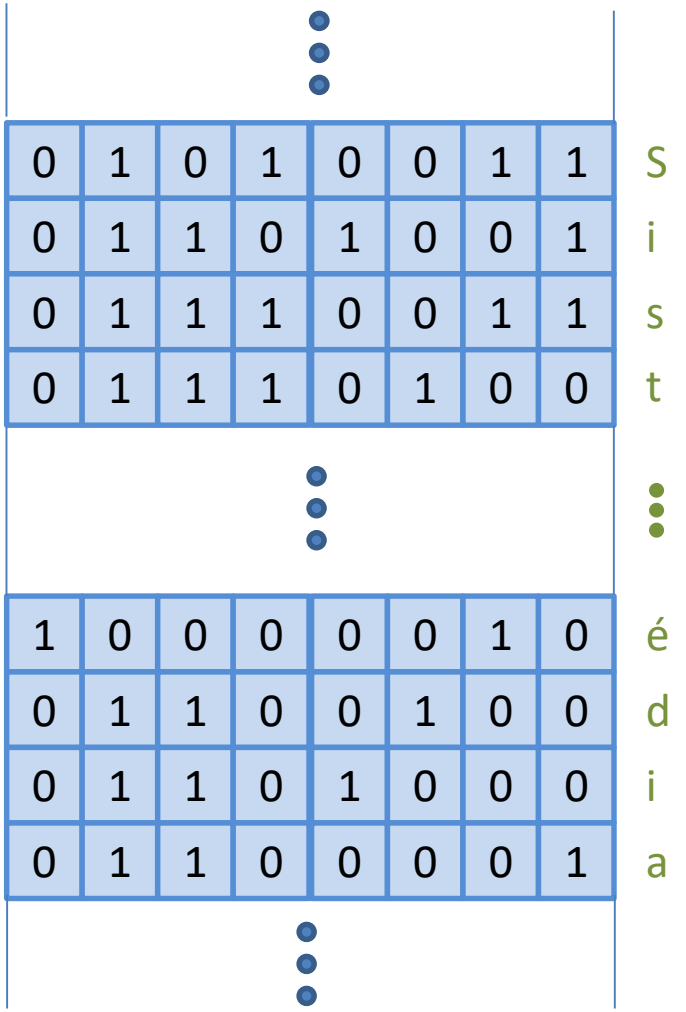
Dec	Char	Dec	Char	Dec	Char	Dec	Char
0	NUL (null)	32	SPACE	64	@	96	`
1	SOH (start of heading)	33	!	65	A	97	a
2	STX (start of text)	34	"	66	B	98	b
3	ETX (end of text)	35	#	67	C	99	c
4	EOT (end of transmission)	36	$	68	D	100	d
5	ENQ (enquiry)	37	%	69	E	101	e
6	ACK (acknowledge)	38	&	70	F	102	f
7	BEL (bell)	39	'	71	G	103	g
8	BS (backspace)	40	(	72	H	104	h
9	TAB (horizontal tab)	41	)	73	I	105	i
10	LF (NL line feed, new line)	42	*	74	J	106	j
11	VT (vertical tab)	43	+	75	K	107	k
12	FF (NP form feed, new page)	44	,	76	L	108	l
13	CR (carriage return)	45	-	77	M	109	m
14	SO (shift out)	46	.	78	N	110	n
15	SI (shift in)	47	/	79	O	111	o
16	DLE (data link escape)	48	0	80	P	112	p
17	DC1 (device control 1)	49	1	81	Q	113	q
18	DC2 (device control 2)	50	2	82	R	114	r
19	DC3 (device control 3)	51	3	83	S	115	s
20	DC4 (device control 4)	52	4	84	T	116	t
21	NAK (negative acknowledge)	53	5	85	U	117	u
22	SYN (synchronous idle)	54	6	86	V	118	v
23	ETB (end of trans. block)	55	7	87	W	119	w
24	CAN (cancel)	56	8	88	X	120	x
25	EM (end of medium)	57	9	89	Y	121	y
26	SUB (substitute)	58	:	90	Z	122	z
27	ESC (escape)	59	;	91	[	123	{
28	FS (file separator)	60	<	92	\	124	|
29	GS (group separator)	61	=	93	]	125	}
30	RS (record separator)	62	>	94	^	126	~
31	US (unit separator)	63	?	95	_	127	DEL

2. Codificação Binária

- Por exemplo, mensagem “Sistemas Multimédia” requer 19 bytes de informação (para armazenamento ou transmissão), se se usar o código ASCII.

- A questão é se esta será a forma mais eficiente de representar esta informação (já foi visto que não é).

- Torna-se necessário, então, analisar a **Eficiência da Codificação**.



3. Codificação Probabilística

- Nos codificadores binários vistos anteriormente, o número de bits usado para cada símbolo é constante.
- Mas pode ser considerada uma codificação que não impõe essa condição.
- Por exemplo:

Símbolo	Código
A	0
B	00
C	1

Este código é **ambíguo**.
A sequência 001 tanto pode representar BC como AAC.

Símbolo	Código
A	0
B	01
C	001

Este código é **não instantâneo**.
Sempre que surge um novo bit 0, é necessário esperar pelos bits seguintes (à partida, não se sabe quantos) para se identificar a chegada de um novo símbolo.

3. Codificação Probabilística

- Nos codificadores binários vistos anteriormente, o número de bits usado para cada símbolo é constante.
- Mas pode ser considerada uma codificação que não impõe essa condição.
- Por exemplo:

Símbolo	Código
A	00
B	01
C	1

Este código é **não ambíguo** e **instantâneo**.

Sempre que surge um 0, já se sabe que é necessário aguardar mais um bit para se identificar o símbolo.

3. Codificação Probabilística

- Como, num conjunto grande de informação (i.e., num conjunto grande de mensagens), alguns símbolos são mais frequentes que outros, então pode-se atribuir um menor número de bits aos símbolos mais frequentes.
- Este conceito deu origem à **Codificação Probabilística**, que entra em conta com a probabilidade de ocorrência de cada símbolo para gerar codificações eficientes.
- Como iremos ver, a probabilidade de ocorrência de um símbolo é uma característica fundamental no conceito de Informação.
- Por exemplo: a informação meteorológica de "chuva" num aeroporto situado num deserto é muito mais informativa do que a informação "sol".

3. Codificação Probabilística

- Considere-se a seguinte mensagem:

AABCABABAAABBCABCAAC

- Esta mensagem é composta por uma sequência de 20 símbolos.
- O alfabeto associado contém 3 símbolos: {A,B,C}
- Nesta mensagem, a frequência de cada símbolo é:

Símbolo	Número de ocorrências	Frequência
A	10	0.5
B	6	0.3
C	4	0.2

3. Codificação Probabilística

- Considere-se a seguinte mensagem:

AABCABABAAABBCABCAAC

- Considere-se, então, a seguinte codificação:

Símbolo	Código
A	0
B	10
C	11

Código não ambíguo e instantâneo.

Número médio de **bits por símbolo**:

$$\frac{5}{3} \approx 1.67$$

- Então, a mensagem pode ser codificada em 30 bits:

001011010010000101011010110011

- A codificação que consideraria um número igual de bits para cada símbolo requereria 40 bits para representar esta mensagem.

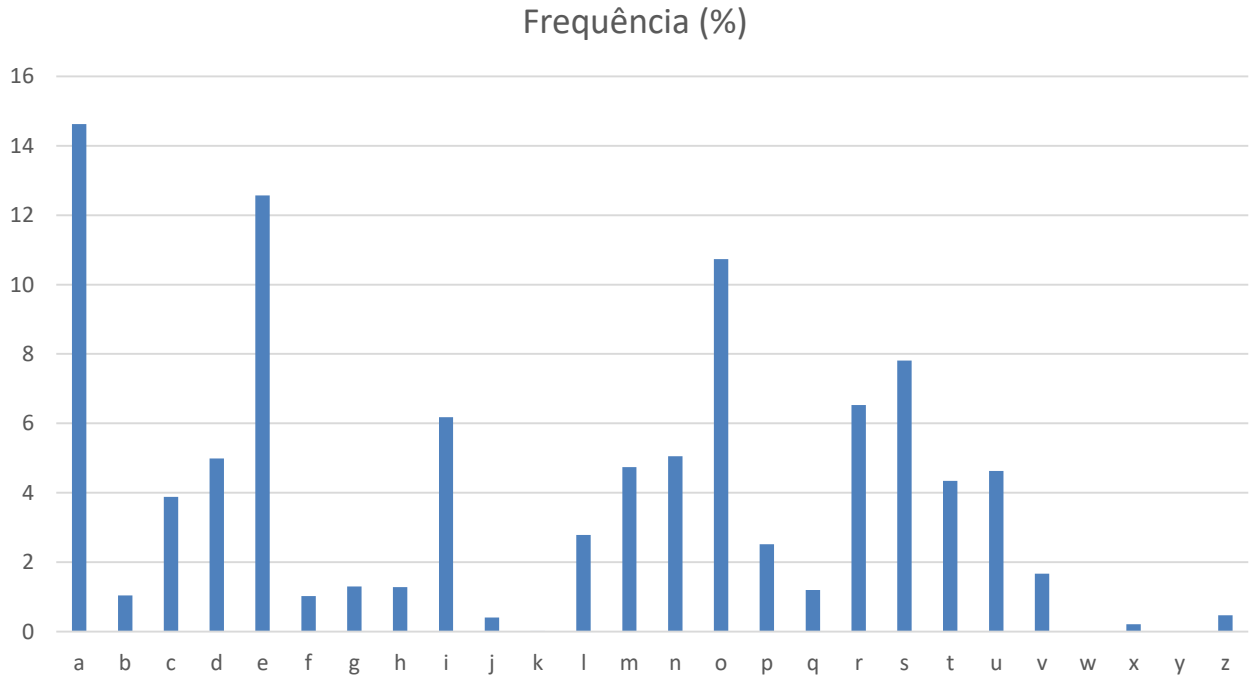
3. Codificação Probabilística

- O código Morse é um exemplo onde códigos mais frequentes são representados com códigos mais curtos – o objetivo essencial era aumentar a **eficiência** na transmissão/receção de mensagens.

- A frequência dos símbolos é a que surge em textos de língua inglesa.

3. Codificação Probabilística

- Naturalmente, na escrita de textos e mensagens em Português, alguns carateres têm maior probabilidade de ocorrência do que outros.
- Essa **probabilidade** associada a cada símbolo (carater) é fundamental para a obtenção de **codificações eficientes**.



4. Quantidade de Informação e Entropia

- Analisemos, então, uma forma de medir a quantidade de informação.
- Seja um símbolo, s_k, de um determinado alfabeto.
- Sabe-se que esse símbolo tem a probabilidade p_k de ocorrer em mensagens geradas por esse alfabeto.
- Que **Quantidade de Informação** está associada à ocorrência (**evento**) desse símbolo numa mensagem?
- Por exemplo, num alfabeto de 256 símbolos, todos com igual probabilidade de ocorrência, é necessário usar um byte para conseguir distinguir símbolos distintos.
- Neste caso, a quantidade de informação associada à ocorrência de um símbolo é igual a 1 byte.

4. Quantidade de Informação e Entropia

- Define-se, então, a seguinte **métrica para a quantidade de informação associada à ocorrência de um símbolo** s_k:

$$I(s_k) = \log_2\left(\frac{1}{p_k}\right) = -\log_2(p_k)$$

- Sabe-se que esse símbolo tem a probabilidade p_k de ocorrer em mensagens geradas por esse alfabeto.

- No exemplo anterior, onde $p_k = 1/256$, obtém-se:

$$I(s_k) = \log_2(2^8) = 8 \text{ bits } (1 \text{ byte})$$

4. Quantidade de Informação e Entropia

- E qual será, então, a quantidade de informação média associada à ocorrência de uma mensagem, gerada por um alfabeto de N símbolos?
- Essa quantidade de informação média designa-se por **Entropia**, e define-se pela média da quantidade de informação associada aos símbolos do alfabeto:

$$H(M) = \sum_{k=1}^{N} p_k \log_2\left(\frac{1}{p_k}\right) = -\sum_{k=1}^{N} p_k \log_2(p_k)$$

- A Entropia tem como unidades:

bits por símbolo (bps)

4. Quantidade de Informação e Entropia

- Revisitando o exemplo visto num slide anterior:

AABCABABAAABBCABCAAC

Símbolo	Número de ocorrências	Frequência	Código
A	10	0.5	0
B	6	0.3	10
C	4	0.2	11

- Entropia:

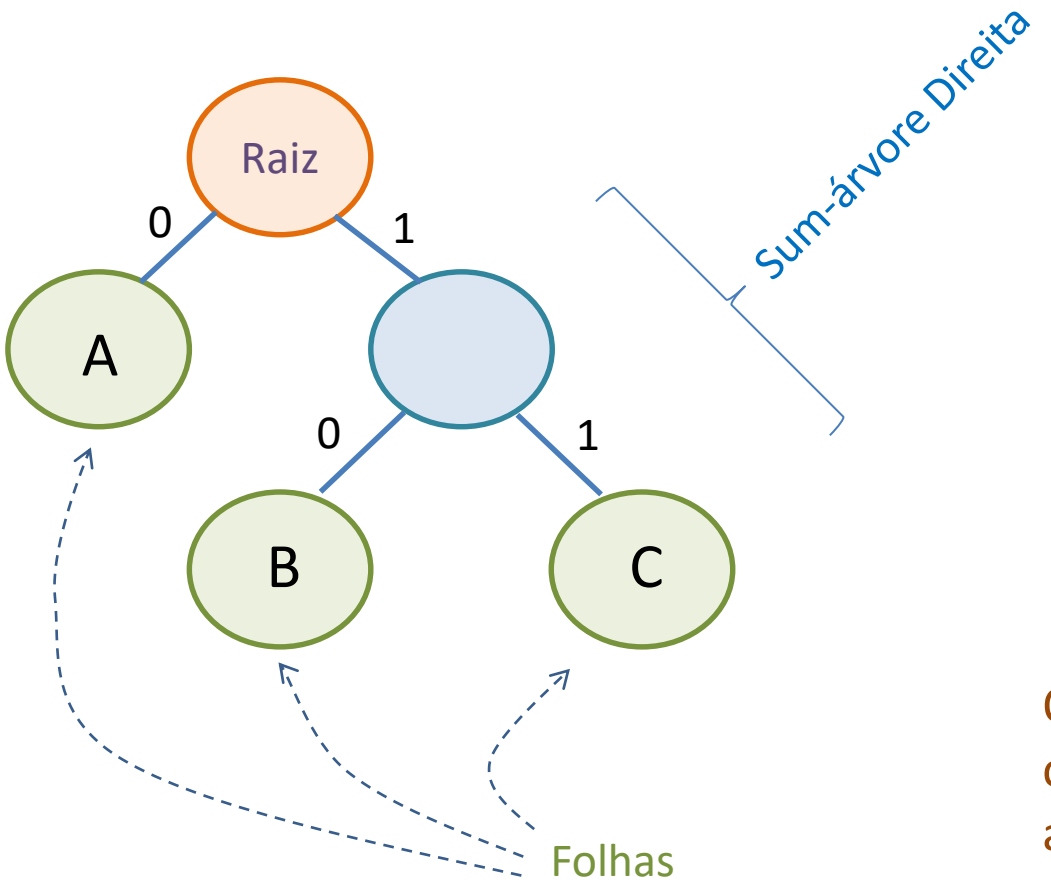
$$H(M) = 0.5 \log_2\left(\frac{1}{0.5}\right) + 0.3 \log_2\left(\frac{1}{0.3}\right) + 0.2 \log_2\left(\frac{1}{0.2}\right) \approx 1.49\ bps$$

- Note-se que, neste exemplo, a probabilidade de cada símbolo é dada apenas pela amostra da mensagem considerada.

5. Árvores Binárias

- É frequente apresentar-se um determinado esquema de codificação binária através de uma **Árvore Binária**.
- A árvore binária permite a implementação simples de algoritmos que definem esquemas de codificação adequados – de elevada **eficiência**.
- Este diagrama permite, ainda, uma perceção visual imediata sobre a abordagem considerada na criação de um esquema de codificação, facilitando, ainda, possíveis otimizações.
- Uma árvore binária é composta por uma sequência de ramificações duplas (ao ramo da esquerda associa-se o bit 0, e ao da direita o bit 1), e que culminam nos símbolos a codificar (as folhas da árvores).
- O código de cada símbolo é o percurso seguido até esse símbolo.

5. Árvores Binárias

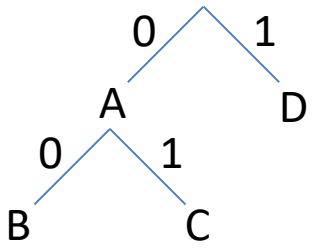


Símbolo	Código
A	0
B	10
C	11

O código de um símbolo é o caminho desde a raiz da árvore até ao elemento correspondente.

5. Árvores Binárias

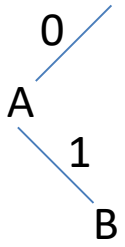
- Ambiguidade e Instantaneidade em árvores binárias:



Símbolo	Código
A	0
B	00
C	01
D	1

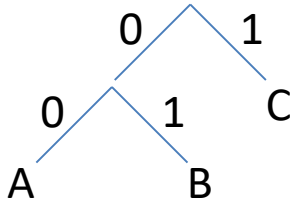
Código ambíguo e não instantâneo.

001 – pode ser AAD, BD ou AC.



Símbolo	Código
A	0
B	01

Código não ambíguo e não instantâneo.



Símbolo	Código
A	00
B	01
C	1

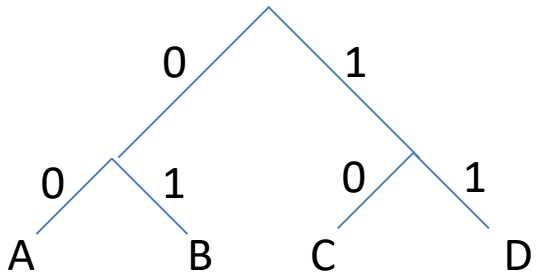
Código não ambíguo e instantâneo.

Verifica-se quando todos os símbolos se encontram em nós terminais (folhas).

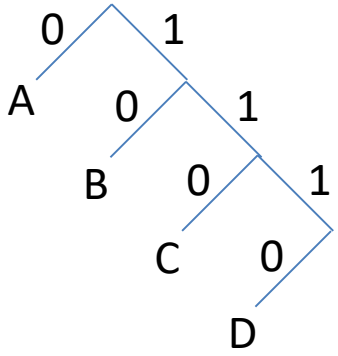
5. Árvores Binárias

- Exemplo:

Símbolo	Código
A	00
B	01
C	10
D	11



Símbolo	Código
A	0
B	10
C	110
D	1110



6. Código de Huffman

- O **código de Huffman** é o resultado de um algoritmo que define a forma de construção da respetiva árvore binária, e cuja eficiência de codificação é elevada.
- Este código considera a lista de símbolos presentes numa mensagem e o respetivo número de ocorrências nessa mensagem.
- Considere-se, então, a título de exemplo ilustrativo, a seguinte mensagem:

AABCADBABADABAABCABCAACACAAA

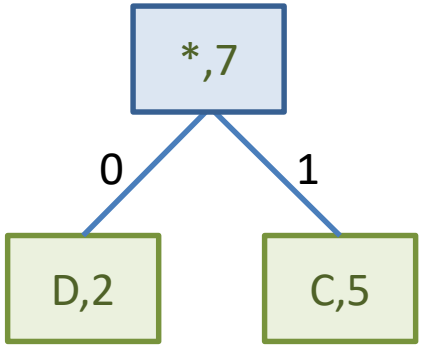
Símbolo	Ocorrências
A	15
B	6
C	5
D	2

6. Código de Huffman

AABCADBABADABAABCABCAACACAAA

Símbolo	Ocorrências
A	15
B	6
C	5
D	2

- Agrupa-se os dois símbolos de menor ocorrência e cria-se o elemento do nível imediatamente superior da árvore, com o valor da soma das ocorrências dos dois símbolos.
- O símbolo de menor ocorrência situa-se sempre à esquerda.

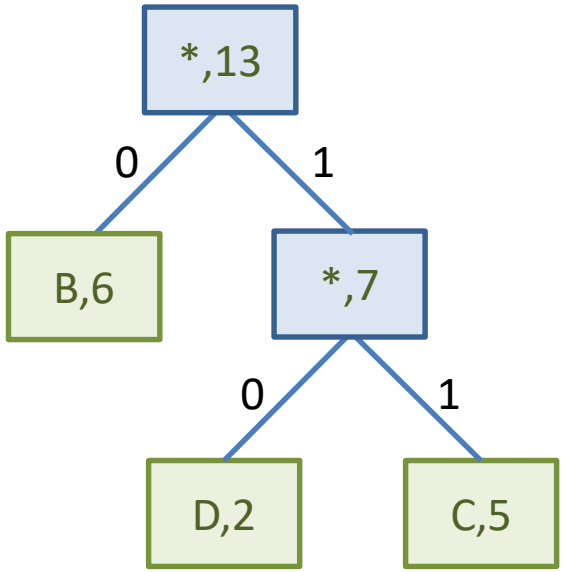


6. Código de Huffman

AABCADBABADABAABCABCAACACAAA

Símbolo	Ocorrências
A	15
B	6
C	5
D	2

- Consideram-se os próximos dois símbolos (de menor ocorrência), podendo o novo nó também ser selecionado.
- O símbolo de menor ocorrência situa-se sempre à esquerda.

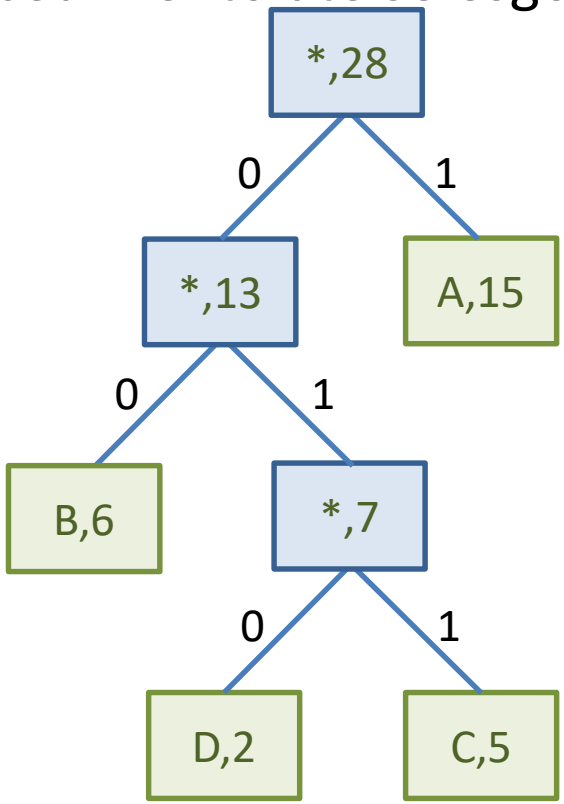


6. Código de Huffman

AABCADBABADABAABCABCAACACAAA

Símbolo	Ocorrências
A	15
B	6
C	5
D	2

- Repete-se o procedimento até se esgotar os símbolos.



Resultado:

Símbolo	Código
A	1
B	00
C	011
D	010

Número de bits necessários para representar a mensagem:

$$15 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 48$$

Número médio de bits por símbolo:

$$48/28 = 1.71\ bps$$

Entropia da mensagem: $1.67\ bps$

7. Codificação de Shannon-Fano

- Este método foi desenvolvido em finais da década de 40 e é atribuído aos dois investigadores (Claude Shannon – Bell Labs (1948), e Robert Fano – MIT (1949)).
- O nível de compressão atingido é similar ao obtido com os códigos de Huffman (1952), embora existam casos em que a codificação de Huffman atinja resultados ligeiramente melhores.
- Tal como o código de Huffman, este algoritmo considera a frequência de ocorrência dos símbolos.
- Como a sua implementação (na codificação e na descodificação) apresenta uma complexidade computacional idêntica à do código de Huffman, e como podem surgir casos em que este último é mais eficiente, o código de Shannon-Fano é normalmente preterido face ao de Huffman.

7. Codificação de Shannon-Fano

- Neste método, os símbolos são ordenados por ordem decrescente de probabilidade de ocorrência.
- Seguidamente, os símbolos são divididos em dois grupos, por forma a que a probabilidade de ambos os grupos seja a mais parecida possível.
- Por exemplo, seja a seguinte mensagem (de 40 elementos):

CABADAAEBBBBEAAACBCABBBACDDDDEEDDDABAEEA

Símbolo	Frequência (%)
A	30 (12/40)
B	25 (10/40)
C	10 (4/40)
D	20 (8/40)
E	15 (6/40)

Símbolo	Freq. (%)
A	30
B	25
D	20
E	15
C	10

55%

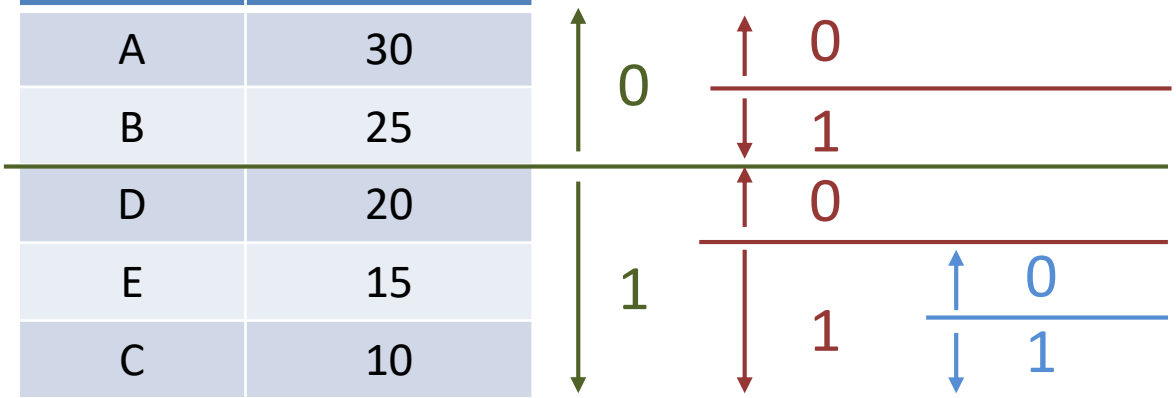
45%

7. Codificação de Shannon-Fano

- Atribui-se, então, o bit 0 ao primeiro conjunto de símbolos, e o bit 1 ao segundo conjunto.
- Em seguida, repete-se o processo para cada um dos grupos, até que todos os subgrupos formados contenham apenas um símbolo.
- Por exemplo, seja a seguinte mensagem (de 40 elementos):

CABADAAEBBBBEAAACBCABBBACDDDDEEDDDABAEEA

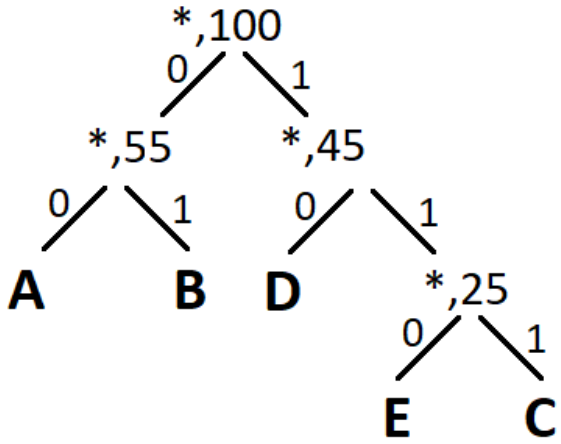
Símbolo	Freq. (%)
A	30
B	25
D	20
E	15
C	10



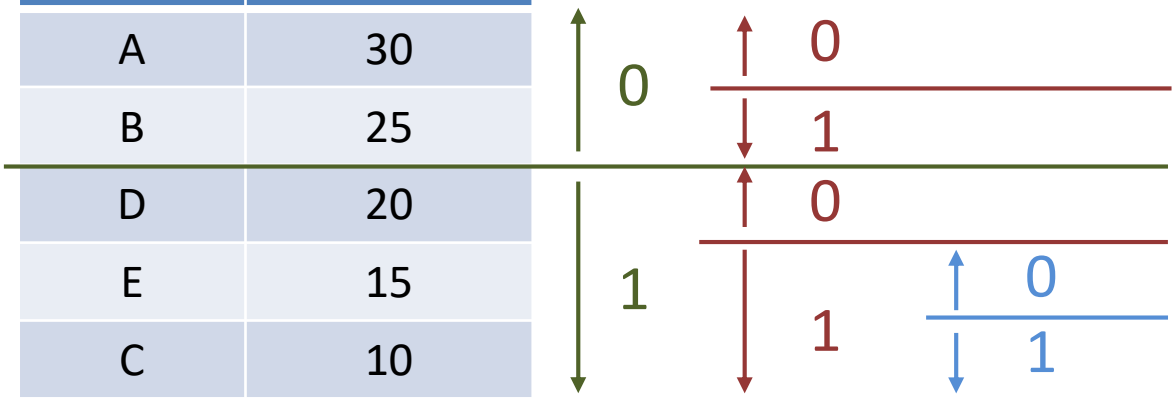
Símbolo	Código
A	00
B	01
D	10
E	110
C	111

7. Codificação de Shannon-Fano

- Se este processo for desenvolvido ao longo da direção vertical, este consiste na criação de uma árvore binária (que, ao contrário da do método de Huffman, é construída do topo para a base).



Símbolo	Freq. (%)
A	30
B	25
D	20
E	15
C	10



Símbolo	Código
A	00
B	01
D	10
E	110
C	111

7. Codificação de Shannon-Fano

- No exemplo desta mensagem:

  CABADAAEBBBBEAAACBCABBBACDDDDEEDDDABAEEA

- Número total de bits usados após codificação de Shannon-Fano:

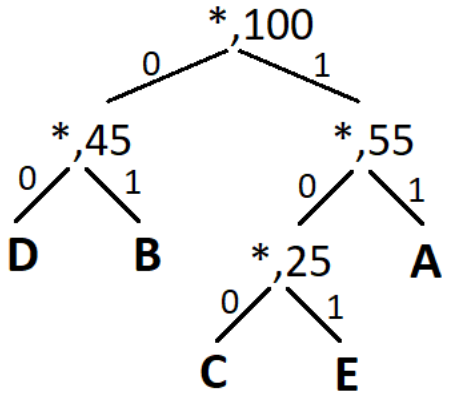
$$2 \cdot 12 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 90 \text{ bits}$$

- Número médio de bits por símbolo:

$$90/40 = 2.250\ bps \text{ (bits por símbolo)}$$

- Entropia: $2.237\ bps$
- Com codificação de Huffman:

$$90\ bits \quad (2.250\ bps)$$



7. Codificação de Shannon-Fano

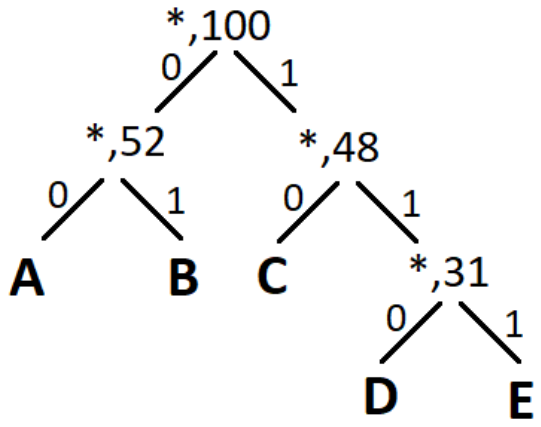
- O código de Shannon-Fano pode não ser tão eficiente quando a probabilidade apresenta assimetria acentuada entre dois subgrupos.

Exemplo:

Símbolo	Frequência (%)
A	35
B	17
C	17
D	16
E	15

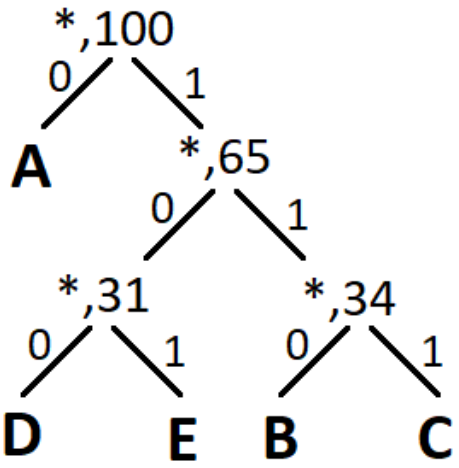
Shannon-Fano:

2.31 bps (em média)



Huffman:

2.30 bps (em média)



8. Codificação Aritmética

- A codificação aritmética consegue, em algumas situações, produzir um nível de compressão superior à da codificação de Huffman.
- Tal como os métodos anteriores, este método utiliza, também, a probabilidade de ocorrência dos símbolos.
- Contudo, apresenta características que lhe permitem, de uma forma simples, ser flexível e dinâmico (por exemplo, gerando uma codificação adaptativa, tendo em conta os símbolos mais recentes).
- A codificação aritmética visa representar uma mensagem (ou partes dela) através de um número real correspondente, situado entre 0.0 e 1.0.

8. Codificação Aritmética

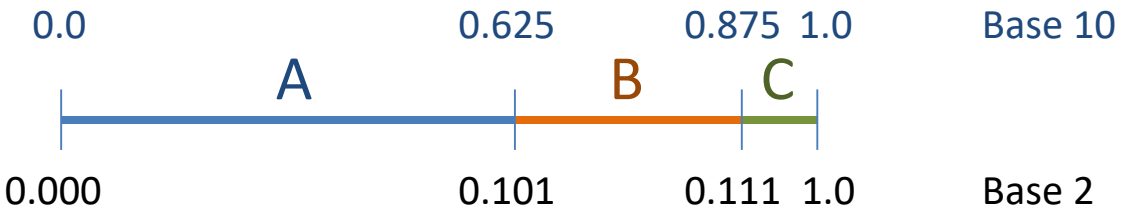
- Por exemplo, considere-se a mensagem:

  ABAAC

  produzida pelo alfabeto cujas probabilidades de ocorrência são:

Símbolo	Probabilidade (%)
A	62.5
B	25.0
C	12.5

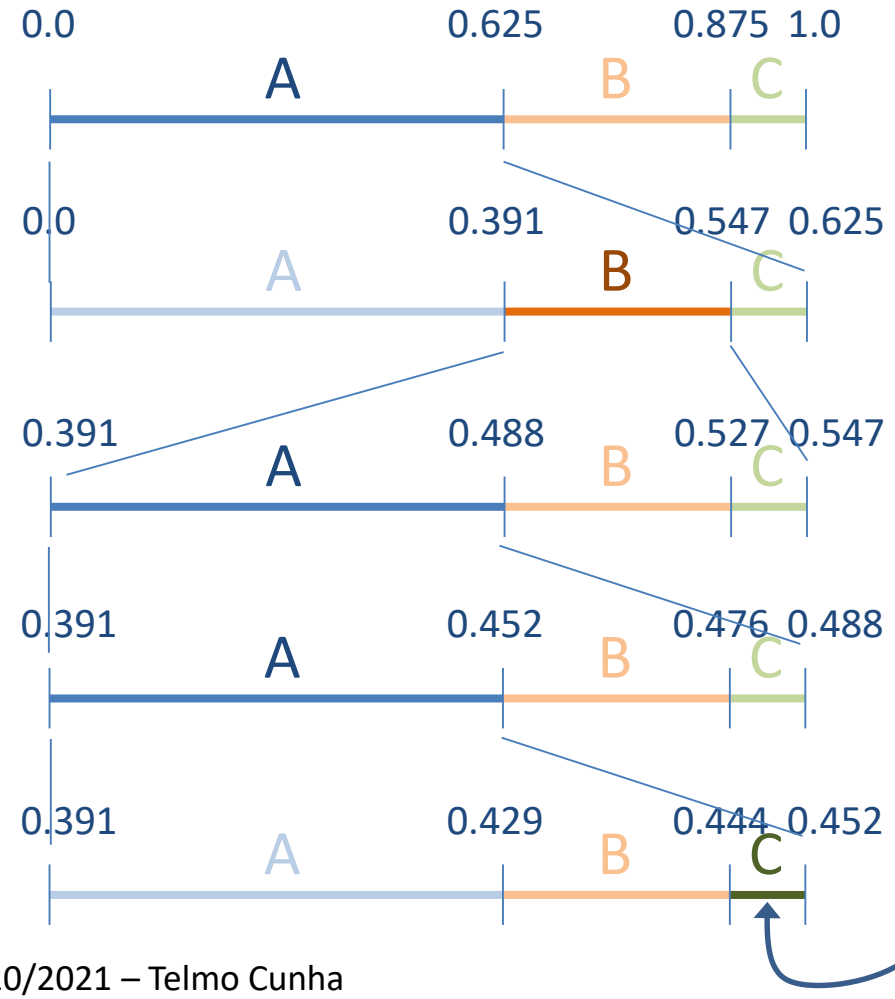
- Divide-se o intervalo $[0;1[$ em partes de dimensões iguais às probabilidades de cada símbolo:



8. Codificação Aritmética

- Subdivide-se os intervalos correspondentes a cada símbolo à medida que estes ocorrem:

ABAAC



Base 10

Qualquer número q neste intervalo representa a mensagem ABAAC:

$0.444 \leq q < 0.452$

Por exemplo:

0.0111001_b

(0.4453_{10})

8. Codificação Aritmética

- Em cada passo deste procedimento, a tabela de probabilidades de ocorrência dos símbolos pode ser alterada de uma forma pré-definida.
- Naturalmente, o processo de descodificação terá que seguir esse mesmo procedimento (que se designa por Modelo).
- Por exemplo, na codificação de texto em língua portuguesa, se surgir o símbolo 'q' será muito provável que o símbolo seguinte seja um 'u', pelo que a tabela de probabilidades pode (pontualmente) ser modificada (conduzindo a uma maior taxa de compressão).
- Podem ser criadas diversas regras que definem, assim, o modelo a ser usado (naturalmente, o aumento da compressão acarreta uma maior complexidade computacional do processo).